Besaran-besaran spin untuk hamburan dengan spin total $\frac{1}{2}$ (contoh, hamburan KN)

Elemen T-matrix dalam basis $|\mathbf{p}\lambda$ adalah $T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ (untuk sementara isospin belum diperhitungkan, lihat catatan berikutnya tentang isospin). Dalam mengerjakan perhitungan hamburan, untuk kemudahan dipilih arah momentum awal sebagai arah z ($\hat{\mathbf{z}} = \hat{p}$). Kemudian, bidang xz dipilih sebagai bidang hamburan (hamburan terjadi pada bidang xz), yaitu $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'$.[1] Dengan demikian, $\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}} = \cos\theta'$, sudut azimuth $\phi' = 0$, and

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = T_{\lambda'\lambda}(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) = T_{\lambda'\lambda}(p', p, \cos\theta') \text{ (disingkat menjadi } T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')) \,. \tag{1}$$

Dalam menghitung besaran hamburan yang berlaku adalah keadaan on-shell (momentum dan energi terhubungkan sebagai $p^2 = 2\mu E$) dan sesuai hukum kekekalan energi $p' = p$, sehingga yang dipakai adalah:

$$T_{\lambda'\lambda}(p\hat{\mathbf{p}}', p\hat{\mathbf{z}}) = T_{\lambda'\lambda}(p, p, \theta') \,. \tag{2}$$

Elemen T-matrix $T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$ mengikuti relasi simetri berikut:

$$T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') = (-)^{\lambda'-\lambda} T_{-\lambda',-\lambda}(p', p, \theta') \tag{3}$$

dan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (lihat catatan hamburan dengan spin $\frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') \\ &\quad + 2\mu \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dp'' \frac{p''^2}{p^2 + i\epsilon - p''^2} \int_{-1}^{1} d\cos\theta'' V^{\lambda}_{\lambda'\lambda''}(p', p'', \theta', \theta'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, \theta'') \,, \end{aligned} \tag{4}$$

dengan

$$V^{\lambda}_{\lambda'\lambda''}(p', p'', \theta', \theta'') \equiv \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} \,. \tag{5}$$

Elemen T-matrix $T_{\lambda'\lambda}(p, p, \theta')$ dimasukkan ke rumus umum besaran spin:

$$I\overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f = \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2 \sum_{\beta=0}^{3} \overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i \mathrm{Tr}\left\{T(p, p, \theta')\sigma_\beta T^+(p, p, \theta')\sigma_\alpha\right\} \,. \tag{6}$$

Rumus umum Eq. (6) tersebut menghubung polarisasi spin di keadaan akhir dan keadaan awal, $\overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f$ dan $\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i$. Operator σ_0 adalah matriks identitas 2×2 untuk merepresentasikan keadaan

[1] Ini dibolehkan mengingat hamburan bersifat invarian terhadap rotasi pada sumbu z.

spin *unpolarized* di awal maupun untuk menyatakan bahwa keadaan spin akhir tidak diukur, sementara operator σ_α dan σ_β for $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ adalah komponen operator spin (matriks) Pauli, menurut *unit vector* berikut:[2]

$$\text{for } \sigma^\beta : \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{k}}_1 \\ \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}' \\ \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} \end{cases} , \quad \text{for } \sigma^\alpha : \begin{cases} \hat{\mathbf{z}}' &= \hat{\mathbf{k}}_1' \\ \hat{\mathbf{y}}' &= \hat{\mathbf{k}}_1 \times \hat{\mathbf{k}}_1' = \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{x}}' &= \hat{\mathbf{y}}' \times \hat{\mathbf{z}}' \end{cases} , \tag{7}$$

dengan $\mathbf{k}_1$ dan $\mathbf{k}_1'$ adalah momentum awal dan akhir proyektil dalam kerangka acuan laboratorium. Relasi sudut hambur di kerangka acuan laboratorium θ_{lab} dan yang di kerangka acuan pusat massa θ' adalah (lihat catatan kinematika hamburan):

$$\tan\theta_{lab} = \left(\frac{m_2}{m_1 \sec\theta' + m_2}\right) \tan\theta' , \tag{8}$$

dengan m_1 dan m_2 adalah massa proyektil dan massa target.

Besaran-besaran spin (contoh, kaon sebagai partikel 1 dan nukleon sebagai partikel 2) adalah sebagai berikut (dengan menerapkan sifat simetri di Eq. (3)):

1. N(K, K)N: Pada reaksi ini spin N pada keadaan awal acak (*unpolarized*) dan pada keadaan akhir spin N tidak diukur. Besaran yang diukur adalah *spin averaged differential cross section.*

$$\begin{aligned} I_0 \equiv \overline{\frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{p}}'}} &= \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')T^+(p,p,\theta')\right\} \\ &= (4\pi^2\mu)^2 \left\{ \left|T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right|^2 + \left|T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right|^2 \right\} . \end{aligned} \tag{9}$$

2. N(K, K)$\vec{\text{N}}$: Pada reaksi ini spin N pada keadaan awal acak (*unpolarized*) dan pada keadaan akhir spin N diamati. Besaran yang diukur adalah polarisasi $P_\alpha = \overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f$:

$$P_\alpha \equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')T^+(p,p,\theta')\sigma_\alpha\right\} . \tag{10}$$

Ingat bahwa T dan tentu saja T^+ bersifat invariant terhadap operasi paritas. Agar P_α invariant terhadap operasi paritas, σ_α harus invariant terhadap operasi paritas. Kita tahu σ_α menyatakan komponen / proyeksi spin pada arah $\hat{\alpha}$ ($\sigma_\alpha = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\alpha}$) dan $\boldsymbol{\sigma}$ tidak terpengaruh operasi paritas. Berarti, arah $\hat{\alpha}$ harus invariant terhadap operasi paritas dan itu adalah hanya arah $\hat{\mathbf{y}}$ (lihat Eq. (7)). Jadi, polarisasi hanya ada pada sumbu y:

$$\begin{aligned} P_y &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')T^+(p,p,\theta')\sigma_y\right\} \\ &= \frac{2}{I_0}(4\pi^2\mu)^2 Im\left\{T^*_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right\} . \end{aligned} \tag{11}$$

[2]Set *unit vector* untuk keadaan awal dan keadaan akhir dibedakan tanpa merubah bidang hambur (arah $\hat{\mathbf{y}}$), sedangkan arah z mengikuti arah proyektil.

3. $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{K},\mathrm{K})\mathrm{N}$: Pada reaksi ini spin N pada keadaan awal diset pada arah tertentu (*polarized*) dan pada keadaan akhir spin N tidak diamati. Besaran yang diukur adalah selisih penampang lintang differensial arah kiri I_L (bidang $\mathrm{x}^+\mathrm{z}$) dari yang arah kanan I_R (bidang $\mathrm{x}^-\mathrm{z}$), dibagi jumlah keduanya $I_L + I_R$. Diperoleh besaran yang diberi nama asimetri A_α:

$$A_\alpha \equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_\alpha T^+(p,p,\theta')\right\} . \tag{12}$$

Dengan alasan yang sama seperti pada polarisasi, diperoleh bahwa asimetri hanya ada pada sumbu y:

$$\begin{aligned} A_y &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_y T^+(p,p,\theta')\right\} \\ &= P_y . \end{aligned} \tag{13}$$

Diperoleh bahwa nilai A_y sama dengan nilai P_y.

4. $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{K},\mathrm{K})\vec{\mathrm{N}}$: Pada reaksi ini spin N pada keadaan awal diset pada arah tertentu (*polarized*) dan pada keadaan akhir spin N diamati. Di sini diamati transisi arah polarisasi N di keadaan awal ke arahnya di keadaan akhir. Besaran yang diukur dinamakan depolarisasi $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_\beta T^+(p,p,\theta')\sigma_\alpha\right\} . \tag{14}$$

Sesuai syarat invariansi terhadap operasi paritas, diperoleh bahwa transisi terjadi tidak untuk sembarang arah, melainkan sebagaimana ditunjukkan oleh besaran depolarisasi berikut ini:

$$\begin{aligned} D_{x'x} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_x T^+(p,p,\theta')\sigma_{x'}\right\} \\ &= \frac{1}{I_0}(4\pi^2\mu)^2 \Bigg[\left\{\left|T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right|^2 - \left|T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right|^2\right\}\cos\theta_{lab} \\ &\qquad + 2Re\left\{T^*_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right\}\sin\theta_{lab}\Bigg] \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} D_{z'x} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_x T^+(p,p,\theta')\sigma_{z'}\right\} \\ &= \frac{1}{I_0}(4\pi^2\mu)^2 \Bigg[\left\{\left|T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right|^2 - \left|T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right|^2\right\}\sin\theta_{lab} \\ &\qquad - 2Re\left\{T^*_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p,p,\theta')\right\}\cos\theta_{lab}\Bigg] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} D_{yy} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_y T^+(p,p,\theta')\sigma_y\right\} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{17}$$

$$D_{x'z} \equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_z T^+(p,p,\theta')\sigma_{x'}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -D_{z'x} && (18)\\
D_{z'z} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \mathrm{Tr}\left\{T(p,p,\theta')\sigma_z T^+(p,p,\theta')\sigma_{z'}\right\} \\
&= D_{x'x}\,. && (19)
\end{aligned}
$$

Didapat D_{yy} bernilai konstan, yaitu 1, $D_{x'z}$ dan $D_{z'x}$ saling berkebalikan tanda, dan $D_{z'z}$ sama dengan $D_{x'x}$.

Semua besaran tersebut dari nomor 1 sampai 4, kecuali D_{yy}, bergantung pada sudut hambur θ'. Masing-masing besaran bukanlah besaran peluang, namun dapat mengindikasikan kemungkinan suatu proses terjadi:

1. I_0: seberapa mungkin proyektil dengan sembarang keadaan spin sistem terhambur ke suatu arah tertentu.

2. P_y: seberapa mungkin spin sistem dari keadaan awal yang *unpolarized* menjadi searah atau berlawanan arah sumbu y setelah kedua partikel berinteraksi dan proyektil terhambur ke sudut tertentu. Nilai polarisasi $-1 \leqslant P_y \leqslant 1$.

3. A_y: seberapa mungkin dan seberapa besar ketaksamaan relatif (asimetri) hamburan ke kiri dan ke kanan pada sudut hambur tertentu, apabila spin awal sistem terpolarisasi pada arah y. Nilai asimetri $-1 \leqslant A_y \leqslant 1$.

4. $D_{\alpha\beta}$: seberapa mungkin terjadi transisi arah spin sistem dari ke keadaan awal ke keadaan akhir pada sudut hambur tertentu. Nilai depolarisasi $-1 \leqslant D_{\alpha\beta} \leqslant 1$, kecuali $D_{yy} = 1$.