Fungsi Gelombang Hamburan

(Acuan: A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press (1965), Bab 11 Subbab 95.)

Kita telah lihat dalam pembahasan sebelum ini dalam gambaran eksperimen bahwa penampang lintang hamburan menyatakan arus partikel (jumlah per satuan waktu) yang terhambur ke arah tertentu dibagi fluks partikel (rapat arus partikel, jumlah partikel per satuan luas per satuan waktu) yang datang menuju target. Kini, kita lihat perhitungan penampang lintang secara teoretis menggunaan mekanika kuantum non relativistik. Perhitungan ini dikerjakan dalam koordinat Jacobi, dan menurut kerangka acuan pusat massa. (Lihat materi sebelum ini mengenai koordinat Jacobi, kinematika hamburan, dan penampang lintang hamburan.)

1 Persamaan Lippmann-Schwinger

Kita mulai dengan persamaan Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r)\right]\psi_p(\mathbf{r}) = E\psi_p(\mathbf{r})\,, \tag{1}$$

dengan $\psi_p(\mathbf{r})$ fungsi gelombang hamburan dan $V(r)$ interaksi antar kedua partikel (proyektil dan target), yang dalam hal ini telah kita nyatakan bersifat sentral, sehingga bergantung pada jarak antar partikel r, bukan posisi relatif $\mathbf{r}$, ataupun posisi masing-masing partikel. Label p diberikan pada $\psi_p(\mathbf{r})$ untuk menyatakan bahwa hamburan berlangsung pada besar momentum linier p, yang terhubung dengan energi E menurut:

$$E = \frac{p^2}{2\mu}\,. \tag{2}$$

Dari persamaan Schrödinger kita peroleh persamaan differensial:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2\right)\psi_p(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)\psi_p(\mathbf{r})\ ,\ \left(k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2}\right)\ , \tag{3}$$

dengan k bilangan gelombang. Energi E tetap, dengan demikian, begitu juga besar momentum p dan bilangan gelombang k. Pada keadaan awal, $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{p}} = \hbar\mathbf{k} = \hbar k\hat{\mathbf{k}}$; pada keadaan akhir, $\mathbf{p}' = p\hat{\mathbf{p}}' = \hbar\mathbf{k}' = \hbar k\hat{\mathbf{k}}'$, dengan $\mathbf{k}$ dan $\mathbf{k}'$ masing-masing adalah vektor gelombang awal dan akhir.

- Pada keadaan awal, jarak antar kedua partikel r lebih dari jangkauan interaksi ($r \to \infty$), sehingga $V(r) = 0$, dan persamaan differensial menjadi (3):

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2\right)\varphi_p(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{4}$$

dengan keadaan sistem $\varphi_p(\mathbf{r})$ adalah keadaan bebas (gelombang bidang) dengan momentum linier $\mathbf{p}$:

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = Ne^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = Ne^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,, \tag{5}$$

dengan N konstanta normalisasi. Fluks awal $\mathbf{j}_i(\mathbf{r})$ diperoleh sebagai berikut:

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2\mu i}\left[\varphi_p^*(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\varphi_p(\mathbf{r}) - (\boldsymbol{\nabla}\varphi_p^*(\mathbf{r}))\varphi_p(\mathbf{r})\right] = |N|^2\frac{\hbar\mathbf{k}}{\mu} = |N|^2\frac{\mathbf{p}}{\mu}\,. \tag{6}$$

- Pada sembarang posisi $\mathbf{r}$ berlaku:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2\right)\psi_p(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)\psi_p(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\,. \tag{7}$$

Solusi persamaan (7) adalah (ingat kuliah Fisika Matematika):

$$\psi_p(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\,, \tag{8}$$

dengan $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ fungsi Green, yang memenuhi persamaan:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2\right)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{9}$$

Sesuai analisis kompleks (ingat kuliah Fisika Matematika, atau lihat Davydov Section 96), ada dua solusi Eq. (9), yaitu $G^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ dan $G^{(-)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Yang sesuai untuk merepresentasikan gelombang terhambur (suku kedua di Eq. (8)), yang merupakan gelombang yang merambat menjauhi pusat hamburan (*outgoing waves*), adalah $G^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, yang diperoleh sebagai berikut:

$$G^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{10}$$

Persamaan (8) kini menjadi (kita beri juga label (+) pada $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$):

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(r')\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}')\,, \tag{11}$$

yang dikenal sebagai persamaan Lippmann-Schwinger.

2 Amplitudo hamburan

Anggap jangkauan interaksi adalah d:

$$V(r)|_{r>d} = 0\,. \tag{12}$$

Dengan demikian, batas integral di Eq. (11) secara efektif hanya sampai $r' = r'_{max} = d$, karena untuk $r' > d$ integrand menjadi nol. Pada keadaan akhir, proyektil terhambur dan target terpental saling berjauhan, sehingga $r \to \infty$ atau $r \gg r'_{max}$. Dengan demikian, untuk integrand di Eq. (11) dapat dilakukan pendekatan (*approximation*) sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(*) \quad k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= k(r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{1/2} \\
&\simeq kr\left(1 - 2\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r}\right)^{1/2} \\
&\simeq kr\left(1 - \hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \\
&\simeq kr - k\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' \\
&\simeq kr - k'\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' \ , \ (k' = k) \\
&\simeq kr - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' \ , \ (\mathbf{k}' = \text{ vektor gelombang akhir } , \ \hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{r}}) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$
(*) \qquad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{1/2} \simeq r\,. \qquad (14)
$$

Dengan pendekatan ini, Eq. (11) menjadi:

$$
\begin{aligned}
\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) &= \varphi_p(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} V(r')\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}') \\
&= \varphi_p(\mathbf{r}) + A_p(\theta) N \frac{e^{ikr}}{r}\,, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

dengan $A_p(\theta)$ dikenal sebagai amplitudo hamburan:

$$
A_p(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2 N}\int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} V(r')\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}')\,. \qquad (16)
$$

Konstanta normalisasi N ditambahkan di suku kedua di Eq. (15) agar konsisten dengan suku pertama. Amplitudo hamburan juga biasa dinyatakan dengan notasi $A(\mathbf{p}', \mathbf{p})$. Melihat Eq. (5), amplitudo hamburan dapat dinyatakan sebagai:

$$
A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2|N|^2}\int d\mathbf{r}' \varphi_{p'}^*(\mathbf{r}') V(r')\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}')\,. \qquad (17)
$$

Amplitudo hamburan jelas tidak bergantung pada konstanta normalisasi, karena faktor $|N|^{-2}$ di Eq. (17) meniadakan konstanta normalisasi yang ada di dalam $\varphi_{p'}^*(\mathbf{r}')$ dan $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}')$ secara bersama. Dalam notasi Dirac, keadaan dinyatakan dengan ket berikut:

$$
|\mathbf{p}\rangle = |\varphi_p\rangle \qquad \text{dan} \qquad |\mathbf{p}\rangle^{(+)} = |\psi_p\rangle^{(+)}\ . \qquad (18)
$$

Amplitudo hamburan dapat dinyatakan sebagai:

$$
A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2|N|^2}\langle\varphi_{p'}|\, V\, |\psi_p\rangle^{(+)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2|N|^2}\langle\mathbf{p}'|\, V\, |\mathbf{p}\rangle^{(+)}\ . \qquad (19)
$$

3 Penampang lintang hamburan

Suku kedua fungsi gelombang hamburan di Eq. (15) merupakan fungsi gelombang terhambur pada r besar, sebut saja $\psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r})$:

$$\psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) N \frac{e^{ipr/\hbar}}{r} \,. \tag{20}$$

Gelombang terhambur inilah yang dapat dihubungkan dengan partikel terhambur yang dideteksi dalam eksperimen. Fluks terhambur $\mathbf{j}_{sc}(\mathbf{r})$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{sc}(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar}{2\mu i} \left[\psi^{(+)*}_{p,sc}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\nabla} \psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r}) - (\boldsymbol{\nabla} \psi^{(+)*}_{p,sc}(\mathbf{r})) \psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r}) \right] \\
&= \frac{\hbar}{2\mu i} \left[\psi^{(+)*}_{p,sc}(\mathbf{r}) \frac{d}{dr} \psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r}) - (\frac{d}{dr} \psi^{(+)*}_{p,sc}(\mathbf{r})) \psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r}) \right] \hat{\mathbf{r}} \\
&= |N|^2 \frac{p}{\mu} \frac{|A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\
&= |N|^2 \frac{\mathbf{p}'}{\mu r^2} |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \,.
\end{aligned} \tag{21}$$

Penampang lintang diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{\mathbf{j}_{sc}(\mathbf{r}) \cdot r^2 d\boldsymbol{\Omega}}{j_i(\mathbf{r})} \\
&= \frac{|N|^2 p |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot r^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega}{\mu r^2 |N|^2 p/\mu} \,, \quad (\mathbf{p}' = p\hat{\mathbf{p}}' = p\hat{\mathbf{r}}) \\
&= |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 d\Omega \,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Penampang lintang differensial dihitung sebagai:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \,, \tag{23}$$

dan penampang lintang total dihitung sebagai:

$$\sigma = \int d\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \int d\Omega |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \,. \tag{24}$$

Sebagai besaran fisika, penampang lintang juga tidak bergantung pada konstanta normalisasi fungsi gelombang.

4 Normalisasi yang dipilih

Di bagian sebelum ini telah ditunjukkan bahwa normalisasi fungsi gelombang tidak mempengaruhi amplitudo hamburan dan, sebagaimana seharusnya, juga penampang lintang hamburan.

Namun, dalam perhitungan kita harus memilih normalisasi yang ingin dipakai. Pemililihan normalisasi ini tentu saja bebas.

Normalisasi yang dipakai dalam kuliah Teori Hamburan adalah mengikuti normalisasi fungsi gelombang bebas $\varphi_p(\mathbf{r})$ sebagai berikut:

$$\int d\mathbf{r}\varphi^*_{p'}(\mathbf{r})\varphi_p(\mathbf{r}) = |N|^2 \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = |N|^2 \int d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}/\hbar} = \delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) \tag{25}$$

$$\rightarrow N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,. \tag{26}$$

Dengan demikian diperoleh:

($*$) fungsi gelombang bebas:

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \tag{27}$$

($*$) fluks awal:

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\mathbf{p}}{\mu} \tag{28}$$

($*$) fungsi gelombang hamburan atau persamaan Lippmann-Schwinger:

$$\psi^{(+)}_p(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}' \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r')\psi^{(+)}_p(\mathbf{r}') \tag{29}$$

($*$) fungsi gelombang hamburan untuk r besar ($r \rightarrow \infty$):

$$\psi^{(+)}_p(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) + A(\mathbf{p}',\mathbf{p})\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ipr/\hbar}}{r} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\left[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} + A(\mathbf{p}',\mathbf{p})\frac{e^{ipr/\hbar}}{r}\right] \tag{30}$$

($*$) amplitudo hamburan:

$$A(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = -(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{p'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_p(\mathbf{r}') = -(2\pi)^2\mu\hbar\,\langle\mathbf{p}'|\,V\,|\mathbf{p}\rangle^{(+)} \tag{31}$$

($*$) fungsi gelombang terhambur:

$$\psi^{(+)}_{p,sc}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{p}',\mathbf{p})\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ipr/\hbar}}{r} \tag{32}$$

($*$) fluks terhambur:

$$\mathbf{j}_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\mathbf{p}'}{\mu r^2}|A(\mathbf{p}',\mathbf{p})|^2 \tag{33}$$

($*$) penampang lintang:

$$d\sigma = |A(\mathbf{p}',\mathbf{p})|^2 d\Omega\,. \tag{34}$$

5 Satuan natural

Dalam fisika nuklir dan partikel digunakan satuan natural, sehingga dinyatakan $\hbar = c = 1$ (c cepat rambat cahaya di vakum). Satuan yang digunakan adalah satuan panjang fm atau satuan energi MeV. Dalam satuan ini, contoh, besaran massa dinyatakan dalam satuan fm^{-1} atau MeV, besaran waktu dalam satuan fm atau MeV^{-1}, besaran luas dalam satuan fm^2 atau MeV^{-2}. Dengan dinyatakan $\hbar = c = 1$, diperoleh hubungan satuan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c &\simeq 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \\
&= 1 \\
\rightarrow 1\,\mathrm{s} &\simeq 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \\
&\simeq 3 \cdot 10^{23}\,\mathrm{fm} \qquad (35) \\
\hbar &\simeq \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{2 \times 3,14}\,\mathrm{J\ s} \\
&\simeq 1,054 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{23}\,\mathrm{J\ fm} \\
&\simeq 3,162 \cdot 10^{-11} \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-13}}\,\mathrm{MeV\ fm} \\
&\simeq 197,625\,\mathrm{MeV\ fm} \\
&= 1 \\
\rightarrow 1\,\mathrm{MeV} &\simeq \frac{1}{197,625}\,\mathrm{fm}^{-1}\,. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\hbar$ dipakai untuk konversi satuan dari yang dinyatakan dalam fm ke yang dalam MeV, atau sebaliknya. Contoh, massa proton $m_p \simeq 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg, dinyatakan dalam MeV dan kemudian dalam fm^{-1}:

$$\begin{aligned}
m_p &\simeq 1,673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\ \times c^2 \\
&\simeq 1,673 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2\,\mathrm{J} \\
&\simeq 1,673 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-13}}\,\mathrm{MeV} \\
&\simeq 941,1\,\mathrm{MeV} \qquad (37) \\
&\simeq \frac{941,1}{\hbar}\,\mathrm{MeV} \\
&\simeq \frac{941,1}{197,625}\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{MeV\ fm}} \\
&\simeq 4,762\,\mathrm{fm}^{-1}\,. \qquad (38)
\end{aligned}$$

Dalam satuan natural, karena $\hbar = c = 1$, dinyatakan:

($*$) fungsi gelombang bebas:

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \tag{39}$$

($*$) fluks awal:

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}}{\mu} \tag{40}$$

($*$) fungsi gelombang hamburan atau persamaan Lippmann-Schwinger:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r')\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}') \tag{41}$$

($*$) fungsi gelombang hamburan untuk r besar ($r \to \infty$):

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) + A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipr}}{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \frac{e^{ipr}}{r} \right] \tag{42}$$

($*$) amplitudo hamburan:

$$A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -(2\pi)^2 \mu \int d\mathbf{r}' \varphi_{p'}^*(\mathbf{r}') V(r') \psi_p^{(+)}(\mathbf{r}') = -(2\pi)^2 \mu \left\langle \mathbf{p}' \right| V \left| \mathbf{p} \right\rangle^{(+)} \tag{43}$$

($*$) fungsi gelombang terhambur:

$$\psi_{p,sc}^{(+)}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipr}}{r} \tag{44}$$

($*$) fluks terhambur:

$$\mathbf{j}_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}'}{\mu r^2} |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \tag{45}$$

($*$) penampang lintang:

$$d\sigma = |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 d\Omega \,. \tag{46}$$

6 Deret Born dan pendekatan Born

Persamaan Lippmann-Schwinger dinyatakan sebagai berikut:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r')\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}') \,, \tag{47}$$

dan amplitudo hamburan sebagai berikut:

$$A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -(2\pi)^2 \mu \int d\mathbf{r}' \varphi_{p'}^*(\mathbf{r}') V(r') \psi_p^{(+)}(\mathbf{r}') \,. \tag{48}$$

Fungsi gelombang hamburan $\psi_p^{(+)}$ dalam integral di Eq. (48) dapat diekspansikan sesuai Eq. (47) sebagai berikut:

$$A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -(2\pi)^2 \mu \int d\mathbf{r}' \varphi_{p'}^*(\mathbf{r}') V(r') \varphi_p(\mathbf{r}')$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2\pi)^2\mu\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{p'}(\mathbf{r}')V(r')\int d\mathbf{r}''\frac{e^{ip|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}V(r'')\psi^{(+)}_p(\mathbf{r}'') \\
= &- (2\pi)^2\mu\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{p'}(\mathbf{r}')V(r')\varphi_p(\mathbf{r}') \\
&+ (2\pi)^2\mu\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{p'}(\mathbf{r}')V(r')\int d\mathbf{r}''\frac{e^{ip|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}V(r'')\varphi_p(\mathbf{r}'') \\
&- \dots ,
\end{aligned} \tag{49}
$$

sehingga diperoleh suatu deret tak berhingga dalam fungsi gelombang bebas φ_p. Deret tersebut dikenal dengan deret Born. Jika perhitungan amplitudo hamburan hanya mengambil sampai suku ke-N deret Born, maka itu disebut sebagai pendekatan Born ke-N (N^{th} *Born approximation*). Yang paling menarik adalah pendekatan Born pertama (*first Born approximation*), karena paling sederhana, kita hanya perlu menghitung suku pertama amplitudo hamburan di Eq. (49):

$$
A^B(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = -(2\pi)^2\mu\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{p'}(\mathbf{r}')V(r')\varphi_p(\mathbf{r}') = -(2\pi)^2\mu\,\langle\mathbf{p}'|\,V\,|\mathbf{p}\rangle\ . \tag{50}
$$

Pendekatan Born pertama dianggap dapat diterima apabila memenuhi suatu syarat, yaitu bahwa besar atau magnitude suku kedua fungsi gelombang hamburan di Eq. (47) sangat kecil relatif terhadap besar suku pertama. Kita lihat berikut ini syarat tersebut secara lebih eksplisit, kita evaluasi magnitude suku-suku fungsi gelombang hamburan di pusat hamburan ($r = 0$), di tempat interaksi $V(r)$ bernilai besar. Pada suku kedua kita juga ganti $\psi^{(+)}_p(\mathbf{r}')$ dengan $\varphi_p(\mathbf{r}')$.

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_p(\mathbf{r})|_{r=0} \gg \left|\frac{\mu}{2\pi}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(r')\varphi_p(\mathbf{r}')\right|_{r=0} \\
\to &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \gg \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left|\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ipr'}}{r'}V(r')e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'}\right| \\
&\gg \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left|\int d\mathbf{r}\frac{V(r)}{r}e^{ipr}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right| \\
\to &\left|\int d\mathbf{r}\frac{V(r)}{r}e^{ipr}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right| \ll \frac{2\pi}{\mu}\ .
\end{aligned} \tag{51}
$$

Kita pilih $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}$, sehingga $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = pr\cos\theta$:

$$
\begin{aligned}
&\to \left|\int_0^\infty dr\, rV(r)e^{ipr}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, e^{ipr\cos\theta}\int_0^{2\pi} d\phi\right| \ll \frac{2\pi}{\mu} \\
&\to \left|\int_0^\infty dr\, rV(r)e^{ipr}\frac{1}{ipr}\left(e^{ipr}-e^{-ipr}\right)\right| \ll \frac{1}{\mu} \\
&\to \left|\frac{1}{ip}\int_0^\infty dr\, V(r)\left(e^{2ipr}-1\right)\right| \ll \frac{1}{\mu}
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \left| \int_0^\infty dr\, V(r) \left(e^{2ipr} - 1 \right) \right| \ll \frac{p}{\mu} \,. \tag{52}$$

Kita tinjau 2 kasus:

1. p bernilai besar, sehingga suku eksponensial sangat berosilasi dan kontribusinya untuk integral nol:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty dr\, V(r) \right| \ll \frac{p}{\mu} \\ \rightarrow\ &\bar{V} d \ll \frac{p}{\mu}\ ,\ (\bar{V} = \text{ potensial rata-rata}\,,\ d = \text{ jangkauan interaksi})\,. \end{aligned} \tag{53}$$

2. p bernilai kecil, sehingga suku eksponensial dapat diekspansi Taylor:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty dr\, V(r)(1 + 2ipr - 1) \right| \ll \frac{p}{\mu} \\ \rightarrow\ &\left| \int_0^\infty dr\, V(r) r \right| \ll \frac{1}{2\mu} \\ \rightarrow\ &\bar{V} d^2 \ll \frac{1}{\mu}\,. \end{aligned} \tag{54}$$