Representasi

(Acuan: A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press (1965), Bab 4.)

1 Fungsi gelombang (*wave function*) dan keadaan (*state*)

Keadaan suatu sistem dapat dinyatakan sebagai sebuah fungsi gelombang. Fungsi gelombang yang dipakai untuk menyatakan keadaan sistem tersebut tidak unik, melainkan bergantung pada representasi yang dipilih. Untuk keadaan yang sama, representasi berbeda memberikan fungsi gelombang berbeda. Contoh, dalam representasi posisi $\mathbf{r}$, keadaan $|\psi\rangle$ dinyatakan sebagai fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r})$. Dalam kalimat lain, fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r})$ menyatakan keadaan $|\psi\rangle$ dalam representasi posisi $\mathbf{r}$. Posisi $\mathbf{r}$ dalam hal ini disebut sebagai indeks representasi (*index of representation*). Fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r})$ diperoleh sebagai proyeksi keadaan $|\psi\rangle$ pada keadaan basis (*basis state*) $|\mathbf{r}\rangle$, atau perkalian skalar $|\mathbf{r}\rangle$ dan $|\psi\rangle$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\psi\rangle \,. \tag{1}$$

Jika kita bekerja dengan fungsi gelombang, dengan demikian, kita telah menentukan pilihan representasi yang dipakai. Tanpa menentukan pilihan representasi, kita bekerja dengan keadaan, bekerja menggunakan notasi Dirac.

Selain representasi posisi terdapat bermacam-macam representasi lain. Satu contoh adalah representasi momentum linier $\mathbf{p}$. Dalam hal ini momentum $\mathbf{p}$ disebut sebagai indeks representasi. Fungsi gelombang $\psi(\mathbf{p})$ menyatakan keadaan $|\psi\rangle$ dalam representasi momentum $\mathbf{p}$. Fungsi gelombang $\psi(\mathbf{p})$ diperoleh sebagai proyeksi keadaan $|\psi\rangle$ pada keadaan basis $|\mathbf{p}\rangle$, atau perkalian skalar $|\mathbf{p}\rangle$ dan $|\psi\rangle$:

$$\psi(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}|\psi\rangle \,. \tag{2}$$

Contoh-contoh fungsi gelombang:

- Keadaan bebas dengan momentum linier $\mathbf{q}$ dalam representasi posisi $\mathbf{r}$, disebut juga fungsi gelombang bebas dengan momentum linier $\mathbf{q}$ dalam ruang posisi (ruang konfigurasi / *configuration space*):
$$\varphi_q(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\mathbf{q}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \,. \tag{3}$$
- Keadaan bebas dengan momentum linier $\mathbf{q}$ dalam representasi momentum linier $\mathbf{p}$, disebut juga fungsi gelombang bebas dengan momentum linier $\mathbf{q}$ dalam ruang momentum linier (*linear momentum space*):
$$\varphi_q(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \delta(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \,. \tag{4}$$

- Keadaan momentum angular orbital $|lm\rangle$ dalam ruang konfigurasi:

$$\langle \hat{\mathbf{r}}|lm\rangle = Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = Y_{lm}(\theta, \phi) \ , \ \left(\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \ . \tag{5}$$

  Di sini vektor unit posisi $\hat{\mathbf{r}}$ menjadi indeks representasi.

- Keadaan momentum angular orbital $|lm\rangle$ dalam ruang momentum linier:

$$\langle \hat{\mathbf{p}}|lm\rangle = Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) = Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \ , \ \left(\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p}\right) \ . \tag{6}$$

  Di sini vektor unit momentum linier $\hat{\mathbf{p}}$ menjadi indeks representasi.

- Pada kasus partikel dalam kotak 1 dimensi, sesuai postulat ekspansi keadaan sembarang partikel $|\psi\rangle$ dinyatakan sebagai:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \ , \tag{7}$$

  dengan $|n\rangle$ keadaan eigen (*eigenstate*) hamiltonian (operator energi total) H dengan nilai eigen E_n:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \ . \tag{8}$$

  Keadaan $|\psi\rangle$ dalam representasi energi diperoleh sebagai:

$$c_n = \langle n|\psi\rangle \ , \ (n = 1, 2, 3, ...) \ . \tag{9}$$

  Di sini bilangan kuantum n (mewakili energi E_n) menjadi indeks representasi. Dalam hal ini, fungsi gelombang bukan berupa suatu fungsi, melainkan suatu himpunan (*set*) $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, karena indeks representasi n bersifat diskrit.

2 Keadaan basis (*basis state*)

Telah ditunjukkan di atas sebagai contoh bahwa $|\mathbf{r}\rangle$ dan $|\mathbf{p}\rangle$ dapat menjadi keadaan basis. Kita tahu bahwa $|\mathbf{r}\rangle$ adalah keadaan eigen operator posisi dengan nilai eigen $\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}\rangle$ adalah keadaan eigen operator momentum linier dengan nilai eigen $\mathbf{p}$. Secara umum, semua keadaan eigen operator besaran fisika dapat menjadi keadaan basis, karena memenuhi syarat keadaan basis, yaitu:

1. ortogonal, dan
2. komplit.

Namun, perhatikan bahwa keadaan basis tidaklah harus merupakan keadaan eigen operator besaran fisika. Ortogonalitas $|\mathbf{r}\rangle$ dan $|\mathbf{p}\rangle$ masing-masing adalah sebagai berikut:

$$\langle \mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad \text{dan} \quad \langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\,. \tag{10}$$

Berkenaan dengan sifat komplit $|\mathbf{r}\rangle$ dan $|\mathbf{p}\rangle$, dikenal relasi kekomplitan (*completeness relation*), yang masing-masing diberikan sebagai berikut:

$$\int d\mathbf{r}\,|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| = \hat{1} \quad \text{dan} \quad \int d\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| = \hat{1}\ ,\ (\hat{1} = \text{ operator } 1)\,. \tag{11}$$

Perhatikan bahwa relasi kekomplitan merupakan suatu operator, sedangkan ortogonalitas merupakan suatu nilai, bukan operator. Di atas juga telah ditunjukkan contoh dari kasus partikel dalam kotak 1 dimensi, bahwa keadaan eigen energi $|n\rangle$ dapat dipakai sebagai keadaan basis. Ortogonalitas dan relasi kekomplitan $|n\rangle$ berturut-turut diberikan sebagai berikut:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n} \quad \text{dan} \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}\,. \tag{12}$$

Keadaan basis $|\mathbf{r}\rangle$ dan $|\mathbf{p}\rangle$ adalah contoh keadaan basis, yang merupakan keadaan eigen operator besaran fisika, dengan nilai eigen kontinyu. Keadaan basis $|n\rangle$ adalah contoh keadaan basis, yang merupakan keadaan eigen operator besaran fisika, dengan nilai eigen diskrit. Penjelasan mengenai dua tipe keadaan basis tersebut dirangkum di bawah ini.

Ambillah keadaan basis $|n\rangle$, dengan n diskrit, dan keadaan basis $|\alpha\rangle$, dengan α kontinyu. Supaya lebih umum, kita ambil sembarang normalisasi.

- ortogonalitas:

$$\langle n'|n\rangle = A\delta_{n'n} \quad \text{dan} \quad \langle \alpha'|\alpha\rangle = A\delta(\alpha' - \alpha)\,. \tag{13}$$

  Biasanya, agar lebih mudah, $A = 1$.

- relasi kekomplitan:
  Dimulai dengan:

$$\lambda \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad \text{dan} \quad \lambda \int d\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1} \quad \rightarrow \lambda = ? \tag{14}$$

  Kita cari λ:

$$\langle n'''|n''\rangle = \langle n'''|\hat{1}|n''\rangle \qquad\qquad \langle \alpha'''|\alpha''\rangle = \langle \alpha'''|\hat{1}|\alpha''\rangle$$

$$A\delta_{n'''n''} = \lambda \sum_n \langle n'''|n\rangle\langle n|n''\rangle \qquad\qquad A\delta(\alpha''' - \alpha'') = \lambda \int d\alpha\,\langle \alpha'''|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha''\rangle$$

$$= \lambda A^2 \sum_n \delta_{n'''n}\delta_{nn''} \qquad = \lambda A^2 \int d\alpha\, \delta(\alpha''' - \alpha)\delta(\alpha - \alpha'')$$

$$= \lambda A^2 \delta_{n'''n''} \qquad = \lambda A^2 \delta(\alpha''' - \alpha'')$$

$$\rightarrow \lambda = A^{-1}\,. \tag{15}$$

Dengan demikian:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = A\hat{1} \quad \text{dan} \quad \int d\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| = A\hat{1}\,. \tag{16}$$

- ekspansi sembarang keadaan $|\psi\rangle$ dan fungsi gelombang:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \hat{1}|\psi\rangle & |\psi\rangle &= \hat{1}|\psi\rangle \\ &= A^{-1}\sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle & &= A^{-1}\int d\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \\ &= A^{-1}\sum_n \psi_n|n\rangle & &= A^{-1}\int d\alpha\, \psi(\alpha)|\alpha\rangle\,. \end{aligned} \tag{17}$$

  Himpunan $\{\psi_n\} = \{\langle n|\psi\rangle\}$ adalah fungsi gelombang dalam basis $|n\rangle$ untuk keadaan $|\psi\rangle$, dan fungsi $\psi(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle$ adalah fungsi gelombang dalam basis $|\alpha\rangle$ untuk keadaan $|\psi\rangle$.

- transformasi basis (yang berarti juga transformasi representasi):
  Dari basis $|n\rangle$ ke basis $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \langle\alpha|\psi\rangle \\ &= \langle\alpha|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= A^{-1}\sum_n \langle\alpha|n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= A^{-1}\sum_n \langle\alpha|n\rangle\psi_n\,, \end{aligned} \tag{18}$$

  dengan perkalian skalar kedua keadaan basis, yaitu $\langle\alpha|n\rangle$, harus diketahui. Sebaliknya, dari basis $|\alpha\rangle$ ke basis $|n\rangle$:

$$\begin{aligned} \psi_n &= \langle n|\psi\rangle \\ &= \langle n|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= A^{-1}\int d\alpha\, \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \\ &= A^{-1}\int d\alpha\, \langle n|\alpha\rangle\psi(\alpha)\,, \end{aligned} \tag{19}$$

dengan $\langle n|\alpha\rangle = \langle\alpha|n\rangle^*$. Jika $\langle\alpha|n\rangle$ tidak diketahui, tapi kita tahu $\langle\alpha|\beta\rangle$ dan $\langle\beta|n\rangle$, maka transformasi dari basis $|n\rangle$ ke basis $|\alpha\rangle$ dapat dilakukan melalui basis $|\alpha\rangle$. Misalkan keadaan basis $|\beta\rangle$ memiliki ortogonalitas dan relasi kekomplitan:

$$\langle\beta'|\beta\rangle = B\delta(\beta'-\beta) \qquad \text{dan} \qquad \int d\beta\, |\beta\rangle\langle\beta| = B\hat{1}\,, \tag{20}$$

maka dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \langle\alpha|\psi\rangle \\
&= \langle\alpha|\hat{1}|\psi\rangle \\
&= B^{-1}\int d\beta\, \langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\psi\rangle \\
&= A^{-1}B^{-1}\sum_n \int d\beta\, \langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|n\rangle\langle n|\psi\rangle \\
&= A^{-1}B^{-1}\sum_n \int d\beta\, \langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|n\rangle\psi_n\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

Contoh transformasi dari basis $|\mathbf{r}\rangle$ ke basis $|\mathbf{p}\rangle$ untuk keadaan $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{p}) &= \langle\mathbf{p}|\psi\rangle \\
&= \langle\mathbf{p}|\hat{1}|\psi\rangle \\
&= \int d\mathbf{r}\, \langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle \\
&= \int d\mathbf{r}\, \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle^*\psi(\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{r}\, \psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

3 Operator

Pada bagian sebelum ini digunakan keadaan basis yang tidak ternormalisasi, sekedar untuk mengingatkan bahwa normalisasi keadaan atau fungsi gelombang dapat sembarang. Namun, di bagian ini supaya mudah kita gunakan keadaan yang ternormalisasi. Dengan demikian, untuk keadaan basis $|n\rangle$ dan $|\alpha\rangle$ berlaku:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n} \quad \text{dan} \quad \langle\alpha'|\alpha\rangle = \delta(\alpha'-\alpha)\,. \tag{23}$$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad \text{dan} \quad \int d\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1}\,. \tag{24}$$

Sebuah operator merupakan suatu matriks. Elemen-elemen matriks operator tersebut dinyatakan menurut representasi atau keadan basis yang dipakai. Ambillah sebuah operator $\hat{A}$. Dalam keadaan basis $|n\rangle$ dan $|\alpha\rangle$, elemen matriks $\hat{A}$ masing-masing adalah:

$$A_{n'n} = \langle n'|\hat{A}|n\rangle \qquad \text{dan} \qquad A(\alpha',\alpha) = \langle \alpha'|\hat{A}|\alpha\rangle\,. \tag{25}$$

Ekspansi operator $\hat{A}$ dalam keadaan basis $|n\rangle$ dan $|\alpha\rangle$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A_{n'''n''} &= \langle n'''|\hat{A}|n''\rangle \\
&= \langle n'''|\hat{1}\hat{A}\hat{1}|n''\rangle \\
&= \sum_{n'n} \langle n'''|n'\rangle\langle n'|\hat{A}|n\rangle\langle n|n''\rangle \\
&= \sum_{n'n} \langle n'''|n'\rangle A_{n'n}\langle n|n''\rangle \\
&= \langle n'''|\left(\sum_{n'n} |n'\rangle A_{n'n}\langle n|\right)|n''\rangle
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A(\alpha''',\alpha'') &= \langle \alpha'''|\hat{A}|\alpha''\rangle \\
&= \langle \alpha'''|\hat{1}\hat{A}\hat{1}|\alpha''\rangle \\
&= \int d\alpha'\, d\alpha\, \langle \alpha'''|\alpha'\rangle\langle \alpha'|\hat{A}|\alpha\rangle\langle \alpha|\alpha''\rangle \\
&= \int d\alpha'\, d\alpha\, \langle \alpha'''|\alpha'\rangle A(\alpha',\alpha)\langle \alpha|\alpha''\rangle \\
&= \langle \alpha'''|\left(\int d\alpha'\, d\alpha\, |\alpha'\rangle A(\alpha',\alpha)\langle \alpha|\right)|\alpha''\rangle
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \hat{A} = \sum_{n'n} |n'\rangle A_{n'n}\langle n| = \int d\alpha'\, d\alpha\, |\alpha'\rangle A(\alpha',\alpha)\langle \alpha|\,. \tag{26}$$

Apabila dalam keadaan basis $|n\rangle$ dan $|\alpha\rangle$ operator (matriks) $\hat{A}$ bersifat diagonal, yaitu:

$$A_{n'n} = A_n\delta_{n'n} \qquad \text{dan} \qquad A(\alpha',\alpha) = A(\alpha)\delta(\alpha',\alpha)\,, \tag{27}$$

maka ekspansi operator $\hat{A}$ dalam keadaan basis $|n\rangle$ dan $|\alpha\rangle$ menjadi:[1]

$$\hat{A} = \sum_{n} |n\rangle A_n\langle n| = \int d\alpha\, |\alpha\rangle A(\alpha)\langle \alpha|\,. \tag{28}$$

Secara umum, sebuah operator bekerja pada suatu keadaan $|\psi\rangle$ menghasilkan keadaan lain $|\upsilon\rangle$:

$$|\upsilon\rangle = \hat{A}|\psi\rangle\,. \tag{29}$$

Dalam basis $|n\rangle$ dan $|\alpha\rangle$ operasi tersebut dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\langle n|\upsilon\rangle &= \langle n|\hat{A}|\psi\rangle \\
&= \sum_{n'} \langle n|\hat{A}|n'\rangle\langle n'|\psi\rangle
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\langle \alpha|\upsilon\rangle &= \langle \alpha|\hat{A}|\psi\rangle \\
&= \int d\alpha'\, \langle \alpha|\hat{A}|\alpha'\rangle\langle \alpha'|\psi\rangle
\end{aligned}$$

[1]Sesungguhnya, apabila operator $\hat{A}$ diagonal dalam suatu keadaan basis, maka belum tentu dalam keadaan basis lain operator $\hat{A}$ juga diagonal.

$$= \sum_{n'} A_{nn'}\psi_{n'} \qquad\qquad = \int d\alpha'\, A(\alpha,\alpha')\psi(\alpha')\,. \tag{30}$$

Berikut ini, sebagai contoh, kita kerjakan elemen matriks momentum linier $\mathbf{p}_{op}$. Dalam basis momentum linier $|\mathbf{p}\rangle$ diperoleh elemen matriks $\mathbf{p}_{op}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{p}'|\mathbf{p}_{op}|\mathbf{p}\rangle &= \langle\mathbf{p}'|\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle \\
&= \langle\mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle\mathbf{p} \\
&= \delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{p} = \mathbf{p}\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,,
\end{aligned} \tag{31}$$

yang berarti matriks $\mathbf{p}_{op}$ diagonal, karena keadaan basis $|\mathbf{p}\rangle$ adalah keadaan eigen $\mathbf{p}_{op}$, dengan nilai eigen $\mathbf{p}$. Dalam basis posisi $|\mathbf{r}\rangle$ diperoleh elemen matriks $\mathbf{p}_{op}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}_{op}|\mathbf{r}\rangle &= \langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}_{op}\hat{1}|\mathbf{r}\rangle \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}_{op}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle\mathbf{p}\langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle\mathbf{p}\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle^* \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathbf{p}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}i\boldsymbol{\nabla}_r\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle i\boldsymbol{\nabla}_r\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle i\boldsymbol{\nabla}_r\,\langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \\
&= \int d\mathbf{p}\, i\boldsymbol{\nabla}_r\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \\
&= i\boldsymbol{\nabla}_r\int d\mathbf{p}\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \\
&= i\boldsymbol{\nabla}_r\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle \\
&= i\boldsymbol{\nabla}_r\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\,.
\end{aligned} \tag{32}$$

Kini, kita lihat operasi operator momentum linier, anggaplah $\mathbf{p}_{op}$ bekerja pada $|\psi\rangle$ menghasilkan $|\upsilon\rangle$. Dalam basis $|\mathbf{p}\rangle$, operasi tersebut menjad:

$$\begin{aligned}
|\upsilon\rangle &= \mathbf{p}_{op}|\psi\rangle \\
\rightarrow \upsilon(\mathbf{p}) = \langle\mathbf{p}|\upsilon\rangle &= \langle\mathbf{p}|\mathbf{p}_{op}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{p}' \, \langle \mathbf{p}|\mathbf{p}_{op}|\mathbf{p}'\rangle\langle \mathbf{p}'|\psi\rangle \\
&= \int d\mathbf{p}' \, \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{p}'\psi(\mathbf{p}') \\
&= \mathbf{p}\psi(\mathbf{p}) \, . \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, dalam basis $|\mathbf{p}\rangle$ operator momentum linier $\mathbf{p}_{op}$ berupa fungsi biasa, bukan operator matematika, yaitu:

$$
\mathbf{p}_{op} = \mathbf{p} \, . \qquad (34)
$$

Berikutnya, dalam basis $|\mathbf{r}\rangle$, operasi itu menjadi:

$$
\begin{aligned}
|\upsilon\rangle &= \mathbf{p}_{op}|\psi\rangle \\
\rightarrow \upsilon(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\upsilon\rangle &= \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}_{op}|\psi\rangle \\
&= \int d\mathbf{r}' \, \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}_{op}|\mathbf{r}'\rangle\langle \mathbf{r}'|\psi\rangle \\
&= \int d\mathbf{r}' \, \left(i\boldsymbol{\nabla}_{r'} \, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right)\psi(\mathbf{r}') \\
&= \; i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')|_{\text{batas integral}} - \int d\mathbf{r}' \, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')i\boldsymbol{\nabla}_{r'} \, \psi(\mathbf{r}') \\
&= 0 - i\boldsymbol{\nabla}_r \, \psi(\mathbf{r}) \\
&= \; - i\boldsymbol{\nabla}_r \, \psi(\mathbf{r}) \, . \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Suku pertama di Eq. (35) nol, sesuai dengan sifat fungsi gelombang di ujung-ujung jagad (daerah berlakunya). Persamaan (35) menunjukkan hal yang telah biasa kita pakai, yaitu dalam basis posisi $|\mathbf{r}\rangle$ operator momentum linier $\mathbf{p}_{op}$ berupa operator differensial sebagai berikut:

$$
\mathbf{p}_{op} = -i\boldsymbol{\nabla} \, . \qquad (36)
$$

Jadi, dalam menggunakan operator momentum linier dalam basis momentum $|\mathbf{p}\rangle$ dan posisi $|\mathbf{r}\rangle$ kita dapat mengambil elemen matriksnya masing-masing di Eqs. (31) dan (32) atau bentuk operatornya masing-masing di Eqs. (34) dan (36).

Transformasi elemen matriks $\hat{A}$ dari basis $|n\rangle$ ke basis $|\alpha\rangle$ dikerjakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
A(\alpha', \alpha) &= \langle \alpha'|\hat{A}|\alpha\rangle \\
&= \langle \alpha'|\hat{1}\hat{A}\hat{1}|\alpha\rangle \\
&= \sum_{n'n} \langle \alpha'|n'\rangle\langle n'|\hat{A}|n\rangle\langle n|\alpha\rangle \\
&= \sum_{n'n} \langle \alpha'|n'\rangle A_{n'n}\langle n|\alpha\rangle \, . \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Jika $\hat{A}$ diagonal dalam keadaan basis $|n\rangle$, tapi tidak dalam keadaan basis $|\alpha\rangle$, maka transformasi di Eq. (37) menjadi:

$$A(\alpha', \alpha) = \sum_n \langle \alpha' | n \rangle A_n \langle n | \alpha \rangle \,. \tag{38}$$

Sebaliknya, transformasi elemen matriks $\hat{A}$ dari basis $|\alpha\rangle$ ke basis $|n\rangle$ dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_{n'n} &= \langle n' | \hat{A} | n \rangle \\ &= \langle n' | \hat{1} \hat{A} \hat{1} | n \rangle \\ &= \int d\alpha' \, d\alpha \, \langle n' | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle \\ &= \int d\alpha' \, d\alpha \, \langle n' | \alpha' \rangle A(\alpha', \alpha) \langle \alpha | n \rangle \,. \end{aligned} \tag{39}$$

Jika $\hat{A}$ diagonal dalam keadaan basis $|\alpha\rangle$, tapi tidak dalam keadaan basis $|n\rangle$, maka transformasi di Eq. (39) menjadi:

$$A_{n'n} = \int d\alpha \, \langle n' | \alpha \rangle A(\alpha) \langle \alpha | n \rangle \,. \tag{40}$$

Contoh, interaksi nuklir antar dua partikel bersifat sentral, sehingga dalam basis posisi $|\mathbf{r}\rangle$ (dalam ruang konfigurasi) matriks potensial bersifat diagonal, dengan elemen matriks sebagai berikut:

$$V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r} \rangle = V(r) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \,. \tag{41}$$

Dalam basis momentum $|\mathbf{r}\rangle$ (dalam ruang momentum) diperoleh elemen matriks potensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle \\ &= \int d\mathbf{r}' \, d\mathbf{r} \, \langle \mathbf{p}' | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \\ &= \int d\mathbf{r}' \, d\mathbf{r} \, \langle \mathbf{p}' | \mathbf{r}' \rangle V(r) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} \, V(r) \langle \mathbf{p}' | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \, V(r) e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}} \,. \end{aligned} \tag{42}$$