

# Partial Wave

(Acuan: A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press (1965), Bab 11 Subbab 98.)

## 1 Dasar ide teknik gelombang parsial (*partial wave*)

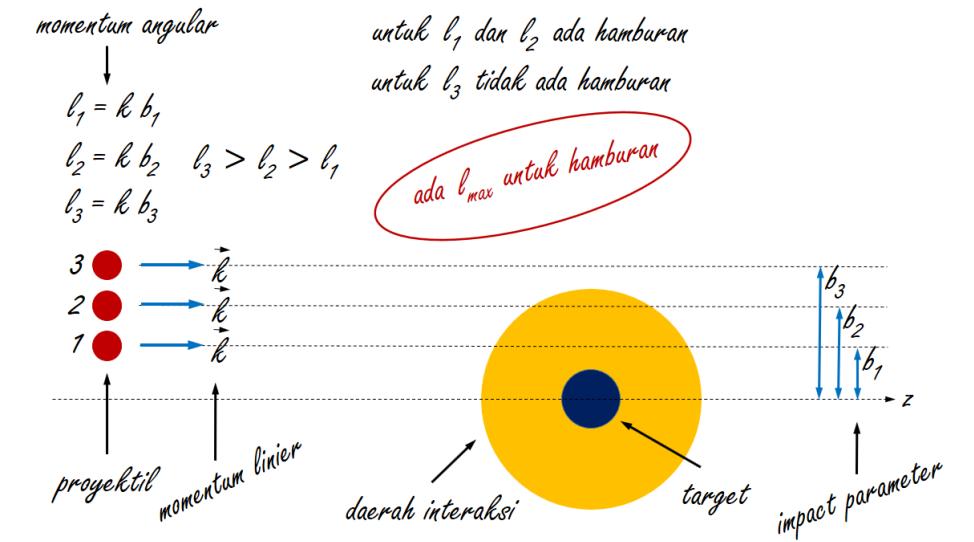


Figure 1: Gelombang parsial pada proses hamburan.

Figure 1 memberikan gambaran mengenai gelombang parsial, yaitu keadaan dengan momen-tum angular tertentu, yang berkontribusi dan yang tidak berkontribusi pada proses hamburan. Ketika proyektil datang mendekati target dengan momentum  $\mathbf{k}$ , momen-tum angularnya dapat bermacam-macam (pada Fig. 1 direpresentasikan dengan keadaan 1, 2, 3). Sesuai perhitungan mekanika kuantum, semua yang mungkin diperhitungkan. Dengan demikian, keadaan-keadaan yang berkontribusi pada proses hamburan dimasukkan dalam perhitungan (pada Fig. 1 keadaan 1 dan 2), sedangkan keadaan yang tidak berkontribusi tidak diambil (keadaan 3). Video penjelasan mengenai Fig. 1 dapat disimak di <https://youtu.be/PtA5cvg3CrU>.

Kita lihat kembali hal yang disampaikan dalam gambar dan video yang disebutkan di atas, namun secara matematis (ingat kembali kuliah Mekanika Kuantum 1). Untuk sembarang interaksi sentral (bergantung pada jarak)  $V(r)$  telah diketahui bahwa kebergantungan fungsi gelombang pada radius  $r$  dapat dipisahkan dari kebergantungannya pada arah  $\hat{\mathbf{r}}$  (atau  $\theta, \phi$ ):

$$\psi_{Elm}(\mathbf{r}) = R_{El}(r)Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1)$$

Setelah  $\psi_{Elm}(\mathbf{r})$  di Eq. (1) dimasukkan ke persamaan Schrödinger, diperoleh persamaan radial

untuk  $R_{El}(r)$ , yang dapat diubah menjadi persamaan untuk  $u_{El}(r) = rR_{El}(r)$  sebagai berikut:

$$\frac{d^2}{dr^2}u_{El}(r) + 2\mu \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u_{El}(r) = 0. \quad (2)$$

Kita ingat kembali makna suku-suku pada Eq. (2). Suku dengan  $l(l+1)$  merepresentasikan energi untuk gerak orbital,  $V(r)$  energi potensial, dan  $E$  energi total, sehingga suku berikut merupakan energi kinetik untuk komponen gerak radial, yang nilainya tentu saja positif:

$$E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} > 0. \quad (3)$$

Kini, anggaplah jangkauan interaksi adalah  $d$ . Untuk  $r > d$  sistem dalam keadaan bebas, karena  $V(r) = 0$ , sehingga energi total hanya merupakan energi kinetik  $E = k^2/(2\mu)$ , dan dari Eq. (3) diperoleh:

$$\frac{k^2}{2\mu} - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} > 0 \rightarrow r > \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}. \quad (4)$$

Persamaan (4) menunjukkan bahwa pada keadaan bebas dengan momentum linier  $k$  dan momen-tum angular  $l$  jarak antara proyektil dan target tidak dapat kurang dari suatu nilai. Jika kita definisikan  $r_l$  sebagai jarak terdekat (*closest approach*) antara proyektil dan target pada keadaan  $l$ , maka:

$$r_l = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \rightarrow r > r_l, \quad (5)$$

dan, sesuai syarat keadaan bebas,  $r_l > d$ . Dengan demikian, diperoleh bahwa keadaan bebas terjadi untuk nilai  $l$  sebagai berikut:

$$\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} > d \rightarrow \sqrt{l(l+1)} > kd, \quad (6)$$

dan sebaliknya, keadaan hamburan terjadi untuk nilai  $l$  sebagai berikut:

$$\sqrt{l(l+1)} < kd. \quad (7)$$

Keadaan hamburan merupakan kombinasi linier semua keadaan dengan momentum angular  $l$ , yang sesuai dengan Eq. (7):

$$\psi_E(\mathbf{r}) = \sum_{lm} c_{lm} \psi_{Elm}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} c_{lm} R_{El}(r) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (8)$$

## 2 Basis gelombang parsial

Fungsi gelombang bebas dalam ruang konfigurasi dapat diekspansikan sebagai berikut:

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{lm} i^l j_l(pr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}). \quad (9)$$

Fungsi gelombang  $\varphi_p(\mathbf{r})$  merupakan representasi keadaan bebas  $|\mathbf{p}\rangle$  dalam ruang konfigurasi (ruang posisi),  $\varphi_p(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle$ . Di Eq. (9) fungsi yang tidak bergantung pada  $\mathbf{r} = (r, \hat{\mathbf{r}})$  adalah fungsi  $Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}})$ . Jadi,  $Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}})$  dapat dilihat sebagai koefisien ekspansi di Eq. (9). Jika didefinisikan  $u_{plm}(\mathbf{r})$  sebagai berikut:

$$u_{plm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l j_l(pr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (10)$$

dapat ditunjukkan bahwa  $u_{plm}(\mathbf{r})$  merupakan fungsi eigen momentum angular:

$$\mathbf{L}^2 u_{plm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l j_l(pr) \mathbf{L}^2 Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = l(l+1) u_{plm}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

$$L_z u_{plm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l j_l(pr) L_z Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = m u_{plm}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

sehingga dapat dipakai sebagai basis. Dengan demikian,  $\varphi_p(\mathbf{r})$  dapat dinyatakan sebagai ekspansi dalam fungsi basis  $u_{plm}(\mathbf{r})$  dengan koefisien ekspansi  $Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}})$ :

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \sum_{lm} u_{plm}(\mathbf{r}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}). \quad (13)$$

Tanpa melihat kebergantungan pada  $\mathbf{r} = (r, \hat{\mathbf{r}})$ , fungsi  $u_{plm}(\mathbf{r})$  ditentukan oleh besar momentum linier  $p$ ,  $l$ , dan  $m$ . Dengan demikian,  $u_{plm}(\mathbf{r})$  merupakan representasi suatu keadaan  $|plm\rangle$  dalam ruang konfigurasi:

$$u_{plm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | plm \rangle. \quad (14)$$

Persamaan (13) kini dapat ditulis sebagai:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \sum_{lm} \langle \mathbf{r} | plm \rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) = \langle \mathbf{r} | \sum_{lm} | plm \rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}), \quad (15)$$

sehingga diperoleh keadaan bebas  $|\mathbf{p}\rangle$  dapat diekspansikan dalam keadaan basis  $|plm\rangle$  dengan koefisien ekspansi  $Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}})$ :

$$|\mathbf{p}\rangle = \sum_{lm} | plm \rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}). \quad (16)$$

Keadaan  $|plm\rangle$  adalah keadaan basis untuk perhitungan di ruang momentum, yang menggunakan ekspansi gelombang parsial. Secara singkat,  $|plm\rangle$  adalah keadaan basis gelombang parsial di ruang momentum (*partial wave basis state in momentum space*).

Keadaan bebas  $|\mathbf{p}\rangle$  juga dapat menjadi keadaan basis, sehingga dapat dipakai untuk menyatakan keadaan  $|plm\rangle$ . Dengan menerapkan ortogonalitas fungsi harmnik bola, diperoleh:

$$\int d\hat{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}) = \int d\hat{\mathbf{p}} \sum_{lm} | plm \rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{lm} |plm\rangle \int d\hat{\mathbf{p}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}) \\
&= \sum_{lm} |plm\rangle \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\
&= |pl'm'\rangle \\
\rightarrow |plm\rangle &= \int d\hat{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) = \int d\hat{\mathbf{p}} |p\hat{\mathbf{p}}\rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}). \tag{17}
\end{aligned}$$

Kita dapat kerjakan perkalian skalar dua basis tersebut,  $|\mathbf{p}\rangle$  dan  $|plm\rangle$ , sebagai berikut ini:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}' | plm \rangle &= \int d\hat{\mathbf{p}} \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \\
&= \int d\hat{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \\
&= \int d\hat{\mathbf{p}} \frac{\delta(p' - p)}{p'p} \delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}') \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\langle plm | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{p}' | plm \rangle^* = \frac{\delta(p' - p)}{p'p} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}'). \tag{20}$$

Ortogonalitas dan relasi kekomplitan  $|plm\rangle$  diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\langle p'l'm' | plm \rangle &= \int d\mathbf{p}'' \langle p'l'm' | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | plm \rangle \\
&= \int_0^\infty dp'' p''^2 \int d\hat{\mathbf{p}}'' \frac{\delta(p'' - p')}{p''p'} Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}'') \frac{\delta(p'' - p)}{p''p} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \int_0^\infty dp'' p''^2 \frac{\delta(p'' - p')}{p''p'} \frac{\delta(p'' - p)}{p''p} \int d\hat{\mathbf{p}}'' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}'') Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} \delta_{l'l} \delta_{m'm} \tag{21}
\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Catatan:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{p} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) &= 1 \\
\rightarrow \int_0^\infty dp p^2 \int d\hat{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) &= \int_0^\infty dp \delta(p' - p) \int d\hat{\mathbf{p}} \delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}) \\
\rightarrow \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) &= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} \delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}) \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| = 1 \\
\rightarrow & \sum_{l'lm'm'} \int_0^\infty dp p^2 \int d\hat{\mathbf{p}} |plm\rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}) \langle pl'm'| = 1 \\
\rightarrow & \sum_{l'lm'm'} \int_0^\infty dp p^2 |plm\rangle \langle pl'm'| \int d\hat{\mathbf{p}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}) = 1 \\
\rightarrow & \sum_{l'lm'm'} \int_0^\infty dp p^2 |plm\rangle \langle pl'm'| \delta_{l'l} \delta_{m'm} = 1 \\
\rightarrow & \sum_{lm} \int_0^\infty dp p^2 |plm\rangle \langle plm| = 1. \tag{22}
\end{aligned}$$

Berikut ini contoh mencari elemen matriks potensial dari ruang konfigurasi ke ruang momentum dalam basis gelombang parsial:

$$\langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r} \rangle = V(r) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\langle p'l'm' | V | plm \rangle &= \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}'' \langle p'l'm' | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | V | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | plm \rangle \\
&= \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}'' \frac{\delta(p''' - p')}{p''' p'} Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \langle \mathbf{p}''' | V | \mathbf{p}'' \rangle \frac{\delta(p'' - p)}{p'' p} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \int d\hat{\mathbf{p}}''' d\hat{\mathbf{p}}'' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \langle p' \hat{\mathbf{p}}''' | V | p \hat{\mathbf{p}}'' \rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \int d\hat{\mathbf{p}}''' d\hat{\mathbf{p}}'' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \langle p' \hat{\mathbf{p}}''' | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | p \hat{\mathbf{p}}'' \rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \int d\hat{\mathbf{p}}''' d\hat{\mathbf{p}}'' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \langle p' \hat{\mathbf{p}}''' | \mathbf{r}' \rangle V(r) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \langle \mathbf{r} | p \hat{\mathbf{p}}'' \rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \int d\mathbf{r} \int d\hat{\mathbf{p}}''' d\hat{\mathbf{p}}'' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \langle p' \hat{\mathbf{p}}''' | \mathbf{r} \rangle V(r) \langle \mathbf{r} | p \hat{\mathbf{p}}'' \rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \int d\hat{\mathbf{p}}''' d\hat{\mathbf{p}}'' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}''') V(r) e^{-i(p' \hat{\mathbf{p}}''' - p \hat{\mathbf{p}}'') \cdot \mathbf{r}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}'') \tag{24}
\end{aligned}$$

### 3 Persamaan T-matrix

Sifat invarian rotasional T-matrix (dan juga potensial) meminta momentum angular tetap:

$$\langle p'l'm' | T | plm \rangle = \langle p'lm | T | plm \rangle \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \tag{25}$$

Lebih dari itu, sifat invarian rotasional juga membuat elemen matriks tidak bergantung pada orientasi kerangka acuan, pada arah sumbu koordinat, sehingga tidak bergantung pada komponen z momentum angular, atau nilai  $m$ . Dengan demikian, elemen matriks T-matrix (dan elemen matriks potensial juga serupa) dalam basis gelombang parsial dinyatakan sebagai berikut, tanpa

label  $m$ :<sup>2</sup>

$$T_l(p', p) = \langle p'lm|T|plm\rangle. \quad (26)$$

Persamaan untuk T-matrix dalam basis  $|plm\rangle$  dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T &= V + VG_0^{(+)}(E_p)T, \quad G_0^{(+)}(E_p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E_p + i\epsilon - H_0} \\ \rightarrow \langle p'lm|T|plm\rangle &= \langle p'lm|V|plm\rangle + \langle p'lm|VG_0^{(+)}(E_p)T|plm\rangle \\ \rightarrow T_l(p', p) &= V_l(p', p) + \sum_{l''m''} \int_0^\infty dp'' p''^2 \langle p'lm|VG_0^{(+)}(E_p)|p''l''m''\rangle \langle p''l''m''|T|plm\rangle \\ &= V_l(p', p) + \sum_{l''m''} \int_0^\infty dp'' p''^2 \langle p'lm|VG_0^{(+)}(E_p)|p''lm\rangle T_l(p'', p) \delta_{l''l} \delta_{m''m} \\ &= V_l(p', p) + \int_0^\infty dp'' p''^2 \langle p'lm|VG_0^{(+)}(E_p)|p''lm\rangle T_l(p'', p) \\ &= V_l(p', p) + \int d\mathbf{p}''' \int_0^\infty dp'' p''^2 \langle p'lm|VG_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}'''\rangle \langle \mathbf{p}'''|p''lm\rangle T_l(p'', p) \\ &= V_l(p', p) + \int d\mathbf{p}''' \int_0^\infty dp'' p''^2 \langle p'lm|VG_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}'''\rangle \frac{\delta(p''' - p'')}{p'''p''} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') T_l(p'', p) \\ &= V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\mathbf{p}''' \langle p'lm|V \frac{1}{E_p + i\epsilon - H_0} |\mathbf{p}'''\rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') T_l(p''', p) \\ &= V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\mathbf{p}''' \langle p'lm|V|\mathbf{p}'''\rangle \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'''}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') T_l(p''', p) \\ &= V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l''m''} \int_0^\infty dp'' p''^2 \\ &\quad \times \int d\mathbf{p}''' \langle p'lm|V|p''l''m''\rangle \langle p''l''m''|\mathbf{p}'''\rangle \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'''}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') T_l(p''', p) \\ &= V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l''m''} \int_0^\infty dp'' p''^2 \\ &\quad \times \int d\mathbf{p}''' V_l(p', p'') \delta_{l''l} \delta_{m''m} \frac{\delta(p''' - p'')}{p'''p''} Y_{l''m''}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'''}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') T_l(p''', p) \\ &= V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\mathbf{p}''' V_l(p', p''') Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}''') \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'''}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') T_l(p''', p) \\ &= V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dp''' p'''^2 V_l(p', p''') \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'''}} T_l(p''', p) \\ &\quad \times \int d\hat{\mathbf{p}}''' Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}''') Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}''') \end{aligned} \quad (27)$$

---

<sup>2</sup>Pada elemen matriks T-matrix di Eq. (26) diberi 3 label, yaitu nilai momentum awal  $p$  dan akhir  $p'$ , serta nilai momentum angular  $l$ . Sebagai pembanding, dalam basis momentum linier  $|\mathbf{p}\rangle$  telah dikerjakan persamaan untuk T-matrix, dan pada akhirnya didapatkan elemen matriks T-matrix, yang bergantung juga pada 3 variabel, yaitu nilai momentum awal  $p$  dan akhir  $p'$ , serta sudut hambur  $\theta'$ .

$$\rightarrow T_l(p', p) = V_l(p', p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dp'' p''^2 V_l(p', p'') \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} T_l(p'', p). \quad (28)$$

## 4 Penampang lintang hamburan

Penampang lintang dihitung sebagai berikut:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (4\pi^2\mu)^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2, \quad (29)$$

dengan  $p' = p$ . Dengan demikian, harus dicari hubungan antara  $T(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  dan  $T_l(p', p)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{p} \rangle \\ &= \sum_{l'''l''m'''m''} \int_0^\infty dp''' dp'' p''^2 p'''^2 \langle \mathbf{p}' | p'''l'''m''' \rangle \langle p'''l'''m''' | T | p''l''m'' \rangle \langle p''l''m'' | \mathbf{p} \rangle \\ &= \sum_{l'''l''m'''m''} \int_0^\infty dp''' dp'' p''^2 p'''^2 \langle \mathbf{p}' | p'''l'''m''' \rangle T_{l''}(p''', p'') \delta_{l'''l''} \delta_{m'''m''} \langle p''l''m'' | \mathbf{p} \rangle \\ &= \sum_{l''m''} \int_0^\infty dp''' dp'' p''^2 p'''^2 \langle \mathbf{p}' | p'''l''m'' \rangle T_{l''}(p''', p'') \langle p''l''m'' | \mathbf{p} \rangle \\ &= \sum_{l''m''} \int_0^\infty dp''' dp'' p''^2 p'''^2 \frac{\delta(p' - p''')}{p'p'''} Y_{l''m''}(\hat{\mathbf{p}}') T_{l''}(p''', p'') \frac{\delta(p - p'')}{pp''} Y_{l''m''}^*(\hat{\mathbf{p}}) \\ &= \sum_{l''m''} Y_{l''m''}(\hat{\mathbf{p}}') T_{l''}(p', p) Y_{l''m''}^*(\hat{\mathbf{p}}) \\ \rightarrow T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \sum_{lm} T_l(p', p) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}') Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (30)$$

Sebagaimana biasa, ditetapkan  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) &= \sum_{lm} T_l(p', p) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}') Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{z}}) \\ &= \sum_{lm} T_l(p', p) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}') Y_{l0}^*(\hat{\mathbf{z}}) \delta_{m0} \\ &= \sum_l T_l(p', p) Y_{l0}(\hat{\mathbf{p}}') Y_{l0}^*(\hat{\mathbf{z}}) \\ &= \sum_l T_l(p', p) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta') \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) T_l(p', p) P_l(\cos \theta'). \end{aligned} \quad (31)$$

Dengan demikian, penampang lintang dihitung sebagai berikut:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\pi\mu)^2 \left| \sum_l (2l+1) T_l(p, p) P_l(\cos \theta') \right|^2. \quad (32)$$

## 5 Pergeseran fase (*phase shift*)

Ekspansi fungsi gelombang bebas  $\varphi_p(\mathbf{r})$  dan fungsi gelombang hamburan  $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$  dalam gelombang parsial, sebut saja  $\varphi_{plm}(\mathbf{r})$  dan  $\psi_{plm}^{(+)}(\mathbf{r})$ , dinyatakan sebagai berikut:<sup>3</sup>

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \sum_{lm} c_{lm} \varphi_{plm}(\mathbf{r}), \quad \varphi_{plm}(\mathbf{r}) = R_{pl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (33)$$

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} c_{lm} \psi_{plm}^{(+)}(\mathbf{r}), \quad \psi_{plm}^{(+)}(\mathbf{r}) = R_{pl}^{(+)}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (34)$$

dengan  $R_{pl}(r)$  dan  $R_{pl}^{(+)}(r)$  fungsi radial, yang masing-masing memenuhi persamaan radial:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2\mu E \right) R_{pl}(r) = 0 \quad (35)$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2\mu E \right) R_{pl}^{(+)}(r) = 2\mu V(r) R_{pl}^{(+)}(r). \quad (36)$$

Diperoleh fungsi radial  $R_{pl}(r) = j_l(pr)$  dan fungsi gelombang bebas  $\varphi_p(\mathbf{r})$  seperti ditunjukkan di Eq. (9). Apabila dipilih  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}$ , maka:

$$Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) = Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{z}}) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \quad (37)$$

sehingga  $\varphi_p(\mathbf{r})$  menjadi:

$$\begin{aligned} \varphi_p(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{lm} i^l j_l(pr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} i^l j_l(pr) Y_{l0}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} i^l j_l(pr) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l j_l(pr) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (38)$$

Serupa dengan  $\varphi_p(\mathbf{r})$  di Eq. (38),  $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l R_{pl}^{(+)}(r) P_l(\cos \theta). \quad (39)$$

---

<sup>3</sup>Koefisien ekspansi  $c_{lm}$  untuk  $\varphi_{plm}(\mathbf{r})$  dan  $\psi_{plm}^{(+)}(\mathbf{r})$  sama, karena hamburan berdiri sendiri untuk tiap nilai momentum angular  $l$ , mengingat hukum kekekalan momentum angular (pada kasus ini spin tidak diperhitungkan):  $\varphi_{plm}(\mathbf{r})$  menghasilkan  $\psi_{plm}^{(+)}(\mathbf{r})$ , dan bobot  $\varphi_{plm}(\mathbf{r})$  dalam  $\varphi_p(\mathbf{r})$  sama dengan bobot  $\psi_{plm}^{(+)}(\mathbf{r})$  dalam  $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$ .

Hamburan diamati di titik yang jauh dari pusat hamburan. Karena itu, kita evaluasi  $R_{pl}(r)$  dan  $R_{pl}^{(+)}(r)$  untuk  $r$  besar, lebih tepatnya untuk  $pr \gg l$ .

$$\begin{aligned} R_{pl}(r) &= j_l(pr) \simeq \frac{1}{pr} \sin \left( pr - \frac{1}{2}l\pi \right), \quad (pr \gg l) \\ &\simeq \frac{i}{2pr} (e^{-i(pr-l\pi/2)} - e^{i(pr-l\pi/2)}). \end{aligned} \quad (40)$$

Persamaan (40) menunjukkan bahwa di tempat yang jauh dari pusat hamburan keadaan bebas (*free state*) merupakan superposisi gelombang bebas yang datang menuju pusat hamburan (suku pertama) dan gelombang bebas yang pergi menjauhi pusat hamburan (suku kedua) dengan keduanya memiliki amplitudo yang sama besar (berarti, peluangnya sama besar).

Fungsi gelombang hamburan untuk  $r$  besar diperoleh sebagai:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \varphi_p(\mathbf{r}) + A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipr}}{r} = \varphi_p(\mathbf{r}) + A(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipr}}{r}. \quad (41)$$

Untuk mencari  $R_l^{(+)}(r)$ , mula-mula kita masukkan Eq. (38) ke Eq. (41) dan bandingkan dengan Eq. (39):

$$\sum_l (2l+1)i^l j_l(pr) P_l(\cos \theta) + A(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) \frac{e^{ipr}}{r} = \sum_l (2l+1)i^l R_{pl}^{(+)}(r) P_l(\cos \theta). \quad (42)$$

Jika, supaya mudah, kita nyatakan:

$$A(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = A(p\hat{\mathbf{p}}', p\hat{\mathbf{z}}) = A(p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{z}}) = A(p, \cos \theta') = \sum_l (2l+1)i^l B_l(p) P_l(\cos \theta), \quad (43)$$

dengan  $B_l(p)$  suatu nilai yang bergantung pada  $l$  dan  $p$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_l (2l+1)i^l \left( j_l(pr) + B_l(p) \frac{e^{ipr}}{r} \right) P_l(\cos \theta) &= \sum_l (2l+1)i^l R_{pl}^{(+)}(r) P_l(\cos \theta) \\ \rightarrow R_{pl}^{(+)}(r) &= j_l(pr) + B_l(p) \frac{e^{ipr}}{r}. \end{aligned} \quad (44)$$

Untuk  $pr \gg l$ , didapatkan:

$$R_{pl}^{(+)}(r) \simeq \frac{i}{2pr} (e^{-i(pr-l\pi/2)} - e^{i(pr-l\pi/2)}) + B_l(p) \frac{e^{ipr}}{r}. \quad (45)$$

Jika, lagi-lagi supaya mudah, kita nyatakan (kedua suku  $R_{pl}^{(+)}(r)$  di Eq. (45) harus berdimensi sama):

$$B_l(p) = \frac{i}{2p} C_l e^{-il\pi/2}, \quad (46)$$

diperoleh:

$$\begin{aligned} R_{pl}^{(+)}(r) &\simeq \frac{i}{2pr} (e^{-i(pr-l\pi/2)} - e^{i(pr-l\pi/2)}) + \frac{i}{2p} C_l e^{-il\pi/2} \frac{e^{ipr}}{r} \\ &\simeq \frac{i}{2pr} (e^{-i(pr-l\pi/2)} - (1 - C_l) e^{i(pr-l\pi/2)}) . \end{aligned} \quad (47)$$

Terakhir, supaya lebih sederhana, dinyatakan:

$$C_l = 1 - S_l , \quad (48)$$

sehingga diperoleh:

$$R_{pl}^{(+)}(r) \simeq \frac{i}{2pr} (e^{-i(pr-l\pi/2)} - S_l e^{i(pr-l\pi/2)}) . \quad (49)$$

Persamaan (49) menunjukkan bahwa di tempat yang jauh dari pusat hamburan, keadaan hamburan (*scattering state*) merupakan superposisi gelombang bebas yang datang menuju pusat hamburan (suku pertama) dan gelombang bebas yang pergi menjauhi pusat hamburan (suku kedua) dengan amplitudo berbeda, yang bergantung pada momentum angular, yaitu  $S_l$ .

Sesuai hukum kekekalan fluks, Eq. (40) jelas menunjukkan bahwa di  $r = 0$  fluks datang sama dengan fluks pergi, tidak ada partikel yang hilang. Untuk gelombang hamburan di Eq. (49) hal yang sama juga harus berlaku. Ini berarti besar (magnitude) amplitudo gelombang bebas pergi sama dengan besar amplitudo gelombang bebas datang, yaitu 1, agar fluks datang sama dengan fluks pergi. Jadi

$$|S_l|^2 = 1 \quad (50)$$

dan  $S_l$  hanya merupakan faktor fase. Didefinisikan:

$$S_l = e^{2i\delta_l} , \quad (51)$$

dengan  $\delta_l$  adalah pergeseran fase (*phase shift*) gelombang hamburan terhadap gelombang bebas, sebagaimana ditunjukkan oleh *probability density* berikut ini:

$$\begin{aligned} R_{pl}^{(+)}(r) &\simeq \frac{i}{2pr} (e^{-i(pr-l\pi/2)} - e^{2i\delta_l} e^{i(pr-l\pi/2)}) \\ &\simeq \frac{i}{2pr} e^{i\delta_l} (e^{-i\delta_l} e^{-i(pr-l\pi/2)} - e^{i\delta_l} e^{i(pr-l\pi/2)}) \\ &\simeq \frac{i}{2pr} e^{i\delta_l} (e^{-i(pr-l\pi/2+\delta_l)} - e^{i(pr-l\pi/2+\delta_l)}) \\ &\simeq \frac{1}{pr} e^{i\delta_l} \sin \left( pr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right) \\ \rightarrow |R_{pl}^{(+)}(r)|^2 &\simeq \frac{1}{(pr)^2} \sin^2 \left( pr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
R_{pl}(r) &\simeq \frac{1}{pr} \sin \left( pr - \frac{1}{2}l\pi \right) \\
\rightarrow |R_{pl}(r)|^2 &\simeq \frac{1}{(pr)^2} \sin^2 \left( pr - \frac{1}{2}l\pi \right) .
\end{aligned} \tag{53}$$

Membandingkan Eqs. (52) dan (53), kita lihat bahwa yang membedakan keadaan hamburan (proyektil dan target berinteraksi) dari keadaan bebas (proyektil dan target tidak berinteraksi) hanyalah  $\delta_l$ . Dengan kata lain,  $\delta_l$  menyimpan semua informasi tentang hamburan. Dari  $\delta_l$  orang dapat menghitung besaran-besaran hamburan (untuk hamburan tanpa spin besar hamburan hanya penampang lintang) dan juga meneliti interaksi antar proyektil dan target (membuat model interaksi antar proyektil dan target).

Dari Eqs. (43), (46), (48), (51), dan juga  $e^{-il\pi/2} = (e^{i\pi/2})^{-l} = i^{-l}$ , amplitudo hamburan diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) &= \frac{i}{2p} \sum_l (2l+1)(1-S_l) P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{i}{2p} \sum_l (2l+1)(1-e^{2i\delta_l}) P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{i}{2p} \sum_l (2l+1)e^{i\delta_l} (e^{-i\delta_l} - e^{i\delta_l}) P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{p} \sum_l (2l+1)e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) .
\end{aligned} \tag{54}$$

Penampang lintang differensial didapatkan sebagai:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{p^2} \sum_{l'l} (2l'+1)(2l+1) P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \delta_{l'} \sin \delta_l e^{i(\delta_l-\delta_{l'})} \\
&= \frac{1}{p^2} \sum_{l'l} (2l'+1)(2l+1) P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \delta_{l'} \sin \delta_l \cos(\delta_l - \delta_{l'}) 
\end{aligned} \tag{56}$$

dan penampang lintang total sebagai:

$$\sigma = \frac{2\pi}{p^2} \sum_{l'l} (2l'+1)(2l+1) \sin \delta_{l'} \sin \delta_l \cos(\delta_l - \delta_{l'}) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta)$$

<sup>4</sup>Komponen  $\sin(\delta_l - \delta_{l'})$  nol, seperti ditunjukkan berikut ini:

$$\begin{aligned}
\sum_{l'l} D_{l'} D_l \sin(\delta_l - \delta_{l'}) &= \sum_{l'<l} D_{l'} D_l \sin(\delta_l - \delta_{l'}) + \sum_{l'>l} D_{l'} D_l \sin(\delta_l - \delta_{l'}) \\
&= \sum_{l'<l} D_{l'} D_l \sin(\delta_l - \delta_{l'}) + \sum_{l>l'} D_l D_{l'} \sin(\delta_{l'} - \delta_l) \\
&= \sum_{l'<l} D_{l'} D_l \sin(\delta_l - \delta_{l'}) - \sum_{l'<l} D_{l'} D_l \sin(\delta_l - \delta_{l'}) \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{p^2} \sum_{l'l} (2l'+1)(2l+1) \sin \delta_{l'} \sin \delta_l \cos(\delta_l - \delta_{l'}) \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{2\pi}{p^2} \sum_{l'l} (2l'+1)(2l+1) \sin \delta_{l'} \sin \delta_l \cos(\delta_l - \delta_{l'}) \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l} \\
&= \frac{4\pi}{p^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l .
\end{aligned} \tag{57}$$

Ambillah komponen imajiner amplitudo hamburan:

$$\text{Im } A(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{p} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l P_l(\cos \theta). \tag{58}$$

Untuk  $\theta = 0$  (*forward scattering*):

$$\text{Im } A(p\hat{\mathbf{z}}, p\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{p} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l P_l(1) = \frac{1}{p} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l. \tag{59}$$

Bandingkan Eq. (59) dengan Eq. (57), didapatkan:

$$\sigma = \frac{4\pi}{p} \text{Im } A(p\hat{\mathbf{z}}, p\hat{\mathbf{z}}). \tag{60}$$

Relasi antara  $\sigma$  dan komponen imajiner amplitudo hamburan untuk  $\theta = 0$  yang ditunjukkan oleh Eq. (60) disebut *optical theorem*.

Dari relasi amplitudo hamburan dengan matriks T, kita dapatkan  $T(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}})$  dalam  $S_l$  dan juga dalam *phase shift*:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) &= - \frac{1}{(2\pi)^2 \mu} A(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) \\
&= - \frac{i}{(2\pi)^2 2\mu p} \sum_l (2l+1)(1-S_l) P_l(\cos \theta)
\end{aligned} \tag{61}$$

$$= - \frac{1}{(2\pi)^2 \mu p} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \tag{62}$$

Jika kita bandingkan Eq. (31) dengan Eq. (61), kita peroleh:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) T_l(p, p) P_l(\cos \theta') &= - \frac{i}{(2\pi)^2 2\mu p} \sum_l (2l+1)(1-S_l) P_l(\cos \theta) \\
\rightarrow T_l(p, p) &= - \frac{i}{2\pi \mu p} (1-S_l) \\
\rightarrow S_l &= 1 - i2\pi \mu p T_l(p, p).
\end{aligned} \tag{63}$$

---

<sup>5</sup>Mengingat amplitudo hamburan bersifat on-shell, maka pada Eq. (61) dan juga Eq. (63) berlaku  $p' = p$ .

Persamaan (63) adalah persamaan yang telah kita kenal sebelumnya, yaitu relasi antara matriks  $T$  dan matriks  $S$ , namun kali ini dalam representasi gelombang parsial, seperti ditunjukkan berikut ini (ingat bahwa matriks  $S$  bersifat on-shell):

$$\begin{aligned}
S &= 1 - 2\pi i \delta(E_{p'} - E_p) T \\
\rightarrow \langle p'lm|S|plm\rangle &= \langle p'lm|plm\rangle - 2\pi i \langle p'lm|\delta(E_{p'} - E_p)T|plm\rangle \\
\rightarrow S_l(p,p) \frac{\delta(p' - p)}{p'p} &= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \sum_{l''m''} \int dp'' p''^2 \langle p'lm|\delta(E_{p'} - E_p)|p''l''m''\rangle \langle p''l''m''|T|plm\rangle \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \sum_{l''m''} \int dp'' p''^2 \langle p'lm|p''l''m''\rangle \delta(E_{p'} - E_p) T_l(p'', p) \delta_{l''l} \delta_{m''m} \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \int dp'' p''^2 \langle p'lm|p''lm\rangle \delta(E_{p'} - E_p) T_l(p'', p) \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \int dp'' p''^2 \frac{\delta(p' - p'')}{p'p''} \delta(E_{p'} - E_p) T_l(p'', p) \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \delta(E_{p'} - E_p) T_l(p', p) \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \left( \frac{dE'}{dp'} \right)^{-1} \delta(p' - p) T_l(p, p), \quad \left( E' = \frac{p'^2}{2\mu} \right) \\
&= \frac{\delta(p' - p)}{p'p} - 2\pi i \frac{\mu}{p'} \delta(p' - p) T_l(p, p) \\
\rightarrow S_l(p,p) &= 1 - i2\pi\mu p T_l(p, p). \tag{64}
\end{aligned}$$

Jadi,  $S_l$  yang didefinisikan di Eq. (48) tidak lain adalah matriks  $S$  dalam representasi gelombang parsial. Dari Eq. (64) kita dapat menghitung pergeseran fase dari  $T_l(p, p)$ , yang merupakan sebagian (bagian on-shell) dari solusi Eq. (28) (berikut ini kita sembunyikan  $(p, p)$ ):

$$\begin{aligned}
S_l &= e^{2i\delta_l} = \cos 2\delta_l + i \sin 2\delta_l = 1 + 2\pi\mu p \operatorname{Im} T_l - i2\pi\mu p \operatorname{Re} T_l \\
\rightarrow \tan 2\delta_l &= \frac{\sin 2\delta_l}{\cos 2\delta_l} = \frac{\operatorname{Im} S_l}{\operatorname{Re} S_l} = \frac{-2\pi\mu p \operatorname{Re} T_l}{1 + 2\pi\mu p \operatorname{Im} T_l} \\
\rightarrow \delta_l &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{-2\pi\mu p \operatorname{Re} T_l}{1 + 2\pi\mu p \operatorname{Im} T_l} \right). \tag{65}
\end{aligned}$$