Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2^{nd} Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Polinomial Karakteristik Matriks

Ambillah persamaan eigenvalue:

$$Au = \alpha u\,, \tag{1}$$

dengan A adalah sebuah matriks $n \times n$, u matriks $n \times 1$ (matriks kolom / vektor), dan α suatu nilai. u merupakan eigenvector dari operator / matriks A, dengan eigenvalue α. Terdapat n buah u dan paling banyak ada n buah α. **Carilah semua (n buah) α tersebut**. Catatan, dalam bahasan ini dianggap tidak ada degenerasi[1].

Dengan I adalah matriks identitas, diperoleh:

$$\begin{aligned} Au &= \alpha u \\ &= \alpha I u \\ \rightarrow (\alpha I - A)u &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Solusi trivial adalah bahwa $u = 0$. Solusi nontrivial $u \neq 0$.

Ambil kasus nontrivial, yang berarti $\alpha I - A$ matriks yang tidak dapat dibalik (*inverted*), tidak memiliki invers, determinannya sama dengan 0:

$$\begin{aligned} \det\left((\alpha I - A)u\right) &= 0 \\ \det(\alpha I - A)\det(u) &= 0 \\ \rightarrow \det(\alpha I - A) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Persamaan (3) merupakan **polinomial karakteristik matriks** A atau sebelumnya dikenal sebagai **persamaan sekuler**. Sisi kiri Pers. (3) merupakan fungsi polinomial berorde n dalam α. Dengan demikian, α **merupakan akar fungsi polinomial** $\det(\alpha I - A)$.

Jika A merupakan matriks diagonal, maka α mudah diperoleh, yaitu α adalah elemen-elemen diagonal A:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha - a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \alpha - a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \alpha - a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1]Pada kasus degenerasi ada lebih dari satu eigenvector yang memiliki eigenvalue yang sama. Pada kasus tersebut terdapat n buah eigenvector u, tapi $< n$ buah eigenvalue α.

$$\begin{aligned}
\det(\alpha I - A) &= \prod_{i=1}^{n} (\alpha - a_{ii}) \\
&= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22}) \ldots \left(\alpha - a_{(n-1)(n-1)}\right)(\alpha - a_{nn}) \\
&= 0 \\
\rightarrow \alpha &= a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{(n-1)(n-1)}, a_{nn}\,. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Jika A bukan matriks diagonal, maka mencari α lebih rumit. Secara numerik α diperoleh dengan memanfaatkan metode-metode pencarian akar fungsi, contoh bisection, yang dikombinasikan dengan langkah-langkah lain, sehingga dapat mencari akar fungsi yang jumlahnya lebih dari satu. Ide dasarnya dapat digambarkan sebagai berikut:

Bayangkan suatu sumbu α. Kita ambil satu bagian kecil pada sumbu α, periksa apakah ada satu akar fungsi di dalamnya. Jika ya, cari akar fungsi di dalam bagian itu. Jika tidak, kita bergerak ke bagian kecil di sebelahnya pada sumbu α dan lakukan hal yang sama seperti sebelumnya. Demikian seterusnya, sampai semua akar fungsi diperoleh.

Untuk menghitung α sebagai akar fungsi polinomial, diperlukan fungsi polinomial tersebut, yaitu $\det(\alpha I - A)$. Berikut ini ditunjukkan fungsi polinomial $\det(\alpha I - A)$ untuk A sembarang matriks dan A matriks tridiagonal.

Fungsi polinomial $\det(\alpha I - A)$**:**

A. A **matriks tridiagonal**

Ambillah matriks tridiagonal B:

$$B = \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & b_{(n-2)(n-3)} & b_{(n-2)(n-2)} & b_{(n-2)(n-1)} & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & b_{(n-1)(n-2)} & b_{(n-1)(n-1)} & b_{(n-1)n} \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n(n-1)} & b_{nn}
\end{pmatrix} \qquad (5)$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} b_{11} \end{pmatrix} \\
\rightarrow \det(B) &= b_{11} \qquad (6)
\end{aligned}$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
\rightarrow \det(B) &= b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \\
&= \det(B)_1 b_{22} - b_{12} b_{21}\,, \qquad (7)
\end{aligned}$$

dengan $\det(B)_1$ adalah determinan dari 1×1 bagian pertama (pojok kiri atas) matriks B.

$n = 3$:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \det(B) &= \left(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}\right) b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} \\ &= \det(B)_2 b_{33} - \det(B)_1 b_{23}b_{32} \,, \end{aligned} \tag{8}$$

dengan $\det(B)_2$ adalah determinan dari 2×2 bagian pertama (pojok kiri atas) matriks B.

$n = 4$:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \det(B) &= \left\{\left(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}\right) b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}\right\} b_{44} - \left(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}\right) b_{34}b_{43} \\ &= \det(B)_3 b_{44} - \det(B)_2 b_{34}b_{43} \,, \end{aligned} \tag{9}$$

dengan $\det(B)_3$ adalah determinan dari 3×3 bagian pertama (pojok kiri atas) matriks B.

Secara umum, untuk matriks tridiagonal B dengan $n > 2$ berlaku relasi rekursi berikut:

$$\det(B)_n = \det(B)_{n-1} b_{nn} - \det(B)_{n-2} b_{(n-1)n} b_{n(n-1)} \,. \tag{10}$$

Dengan demikian, $\det(B)_n$ dicari melalui iterasi, dimulai dengan menghitung $\det(B)_1$ dan $\det(B)_2$, kemudian menghitung $\det(B)_3$, $\det(B)_4$ dan seterusnya sampai $\det(B)_n$ menggunakan relasi (10). Dalam hal polinomial karakteristik matriks, matriks B diganti dengan $\alpha I - A$.

B. A sembarang matriks

$n = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \det(\alpha I - A) &= \alpha - a_{11} \end{aligned} \tag{11}$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \det(\alpha I - A) &= \left(\alpha - a_{11}\right)\left(\alpha - a_{22}\right) - a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{12}$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \alpha - a_{33} \end{pmatrix} \\
\rightarrow \det(\alpha I - A) &= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33}) - (\alpha - a_{11}) a_{23}a_{32} - (\alpha - a_{22}) a_{13}a_{31} \\
&\quad - (\alpha - a_{33}) a_{12}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21}
\end{aligned} \tag{13}$$

$n = 4$:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \alpha - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \alpha - a_{44} \end{pmatrix} \\
\rightarrow \det(\alpha I - A) &= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33})(\alpha - a_{44}) - (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22}) a_{34}a_{43} \\
&\quad - (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{33}) a_{24}a_{42} - (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{44}) a_{23}a_{32} \\
&\quad - (\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33}) a_{14}a_{41} - (\alpha - a_{22})(\alpha - a_{44}) a_{13}a_{31} \\
&\quad - (\alpha - a_{33})(\alpha - a_{44}) a_{12}a_{21} - (\alpha - a_{11}) a_{23}a_{34}a_{42} \\
&\quad - (\alpha - a_{11}) a_{24}a_{43}a_{32} - (\alpha - a_{22}) a_{13}a_{34}a_{41} \\
&\quad - (\alpha - a_{22}) a_{14}a_{43}a_{31} - (\alpha - a_{33}) a_{12}a_{24}a_{41} \\
&\quad - (\alpha - a_{33}) a_{14}a_{42}a_{21} - (\alpha - a_{44}) a_{12}a_{23}a_{31} \\
&\quad - (\alpha - a_{44}) a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{43}a_{31} \\
&\quad - a_{13}a_{34}a_{42}a_{21} - a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} - a_{14}a_{42}a_{23}a_{31} - a_{14}a_{43}a_{32}a_{21} \\
&\quad + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42} + a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}
\end{aligned} \tag{14}$$

Tidak ada relasi rekursi yang dapat digunakan untuk menghitung determinan sembarang matriks. Dalam hal ini, kita dapat manfaatkan teknik LU decomposition untuk menghitung determinan sembarang matriks:

$$\alpha I - A = \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & \\ -a_{n-1,1} & ... & \alpha - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & ... & -a_{n,n-1} & \alpha - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} l_{11} & ... & ... & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & ... & l_{n-1,n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & ... & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & 1 & ... & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix} \\
&= L\,U \\
\rightarrow \det(\alpha I - A) &= \det(L)\det(U) \\
&= \det(L) \\
&= \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \qquad (15)
\end{aligned}
$$