Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Persamaan Eigenvalue

Contoh, lagi, gelombang pada tali yang kedua ujungnya diikat. Pada suatu waktu simpangan di sepanjang tali y(x) memenuhi PD orde 2:

$$f(x)\frac{d^2}{dx^2}y(x)=ky(x)$$

dengan k berhubungan dengan frekwensi, yang nilainya tidak sembarang, yang menunjukkan modus gelombang. Untuk tiap-tiap modus/frekwensi/k yang mungkin, berlaku simpangan y(x) tertentu. Dengan kata lain, k merupakan eigenvalue untuk eigenfunction y(x). Persamaan di atas disebut persamaan eigenvalue.

Dengan metode Finite Differences, PD di atas menjadi: $\frac{f_i}{h^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})=ky_i$

yang membentuk persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \frac{f_i}{h^2} & \frac{-2f_i}{h^2} & \frac{f_i}{h^2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} \vdots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} k=? \\ y=? \end{matrix}$$

Metode Pangkat (Power Method)

Persamaan eigenvalue: $A\,u_i = \lambda_i\,u_i, \qquad u_i = \text{eigenfunction}, \;\; \lambda_i = \text{eigenvalue}$

Jika A matriks n x n, maka i = 1, …, n.

Sebagai eigenfunction (atau disebut juga eigenvector), u_i bersifat orthogonal dan juga komplit yaitu, sembarang fungsi (vector) x dapat dtulis sebagai kombinasi linear u_i :

$$\text{orthogonal:} \quad u_i^T u_j = \delta_{ij} \qquad\qquad \text{komplit:} \quad x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

Bermula dengan sembarang vector x, dilakukan iterasi berikut:

$$\begin{tikzcd} A\,x = y \arrow[r] & y \to x \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Untuk kali pertama: $$y^{(1)} = A\,x = A\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i u_i$$

Setelah m kali iterasi diperoleh: $$y^{(m)} = A^m x = A^m \sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i A^m u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^m u_i$$

Anggap λ_k merupakan eigenvalue terbesar: $\left|\frac{\lambda_{i\neq k}}{\lambda_k}\right| < 1$

Maka, jika m besar (banyak iterasi):

$$y^{(m)} = A^m x = c_k \lambda_k^m u_k + \sum_{i\neq k} c_i \lambda_i^m u_i = \lambda_k^m \left(c_k u_k + \sum_{i\neq k} c_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_k^m} u_i \right) \cong c_k \lambda_k^m u_k$$

λ_k diperoleh dengan jalan:

$$x^T y^{(m)} = x^T A^m x \cong c_k \lambda_k^m \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^T u_k \cong c_k \lambda_k^m \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ik} \cong c_k^2 \lambda_k^m \longrightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{x^T y^{(m)}}{x^T y^{(m-1)}}}$$

u_k diperoleh dengan jalan:

$$\left|y^{(m)}\right|^2 = y^{(m)T} y^{(m)} \cong \left(c_k \lambda_k^m\right)^2 u_k^T u_k \cong \left(c_k \lambda_k^m\right)^2 \longrightarrow \boxed{u_k \cong \frac{y^{(m)}}{\left|y^{(m)}\right|}}$$

Jika $\lambda_k^{(m)}$ merupakan nilai λ_k yang diperoleh setelah iterasi sebanyak m kali, maka iterasi dihentikan setelah dicapai nilai yang konvergen:

$$\left|1 - \frac{\lambda_k^{(m-1)}}{\lambda_k^{(m)}}\right| < \varepsilon, \qquad \varepsilon = \text{bilangan kecil}$$

Untuk mencari eigenvalue terbesar kedua, hilangkan u_k dari perhitungan.
Jadi, dipakai vector awal baru x':

$$x' = (A - \lambda_k)\,x = \sum_{i=1}^{n} c_i (A - \lambda_k) u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda_i - \lambda_k) u_i = \sum_{i \neq k} c_i (\lambda_i - \lambda_k) u_i = \sum_{i \neq k} d_i u_i \quad \left(d_i \equiv c_i(\lambda_i - \lambda_k)\right)$$

Iterasi:

$$A\,x' = y' \longrightarrow y' \to x'$$

Setelah m kali iterasi diperoleh: $$y'^{(m)} = A^m x' = \sum_{i \neq k} d_i \lambda_i^{\,m} u_i$$

Anggap λ_l merupakan eigenvalue terbesar kedua: $$\left|\frac{\lambda_{i \neq k \neq l}}{\lambda_l}\right| < 1$$

sehingga setelah banyak iterasi: $$y'^{(m)} \cong d_l \lambda_l^{\,m} u_l$$

Memperoleh λ_l dan u_l: $$\boxed{\lambda_l = \frac{x'^T y'^{(m)}}{x'^T y'^{(m-1)}} \qquad u_l \cong \frac{y'^{(m)}}{\left|y'^{(m)}\right|}}$$

Pola yang sama berlaku untuk mencari eigenvalue terbesar berikutnya.

Metode Pangkat Kebalikan (Inverse Power Method)

Dengan metode pangkat didapat eigenvalue terbesar. Untuk mencari eigenvalue terkecil digunakan metode pangkat kebalikan.

$$A\,u_i = \lambda_i\,u_i \longrightarrow A^{-1}A\,u_i = \lambda_i\,A^{-1}u_i \longrightarrow A^{-1}u_i = \lambda_i^{-1}u_i$$

Bermula dengan sembarang vector x, dilakukan iterasi berikut:

$$A^{-1}\,x = y \longrightarrow y \to x$$

Setelah m kali iterasi diperoleh: $y^{(m)} = (A^{-1})^m x = \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i^{-1})^m u_i$

Jika λ_s eigenvalue terkecil, maka setelah banyak kali iterasi: $y^{(m)} \cong c_s(\lambda_s^{-1})^m u_s$

Jadi, λ_s diperoleh sebagai: $\boxed{\lambda_s = \dfrac{x^T y^{(m-1)}}{x^T y^{(m)}}}$ dan u_s : $\boxed{u_s \cong \dfrac{y^{(m)}}{\left|y^{(m)}\right|}}$