Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Persamaan Differensial Parsial

Pada bagian ini disampaikan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial 2 dimensi tipe eliptik, parabolik dan hiperbolik.

Persamaan Differensial Eliptik

Bentuk umum PD eliptik: $\nabla^2\psi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$

Untuk kasus 2 dimensi: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = -4\pi\rho(x,y)$

Gunakan metode finite differences:

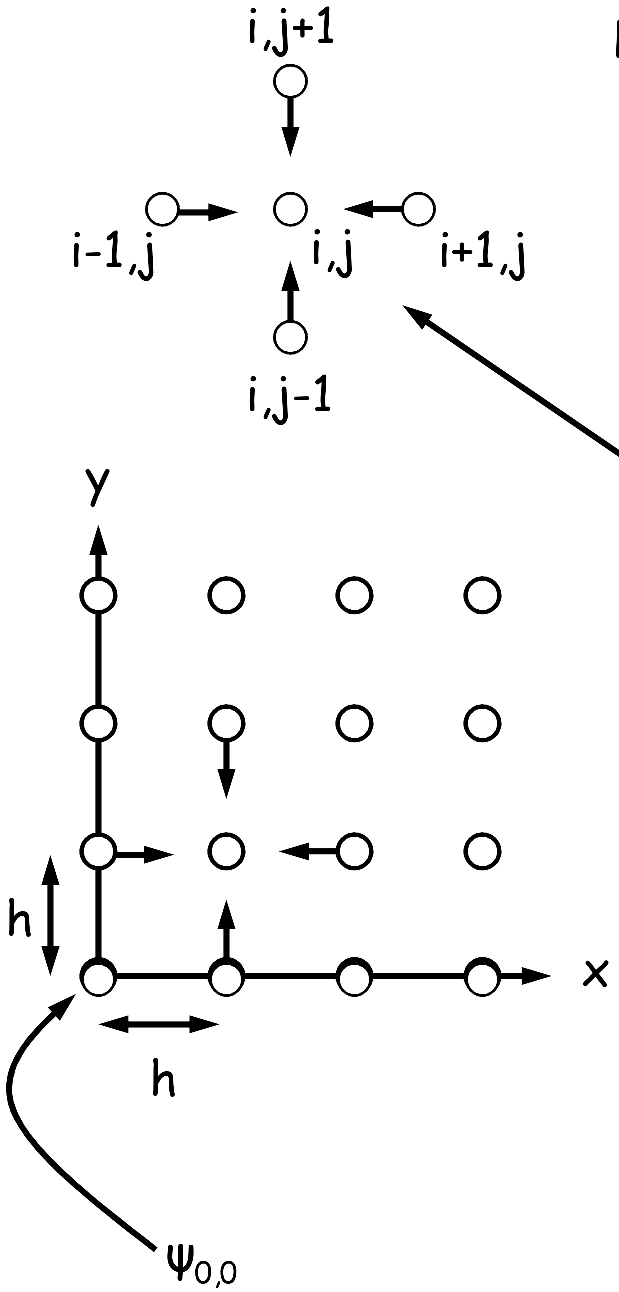
$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)\right|_{x_i,y_j} \approx \frac{\psi(x_{i+1},y_j) - 2\psi(x_i,y_j) + \psi(x_{i-1},y_j)}{h^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)\right|_{x_i,y_j} \approx \frac{\psi(x_i,y_{j+1}) - 2\psi(x_i,y_j) + \psi(x_i,y_{j-1})}{h^2} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h^2}$$

$$(h = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j)$$

Dicari distribusi spasial ψ .

Diperoleh: $\boxed{\psi_{i,j} = h^2\pi\rho_{i,j} + \tfrac{1}{4}\left[\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}\right]}$



Langkah:

1. Buat grid pada bidang xy, dengan jarak terdekat antar titik h.
2. (Dianggap nilai pada batas-batas bidang xy diketahui.)

   Hitung dengan rumus :

   $$\psi_{i,j} = h^2 \pi \rho_{i,j} + \tfrac{1}{4}\left[\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}\right]$$

   secara berurutan $\psi_{i,j}$ untuk i = 1 & j = 1, 2, 3, ..., lalu i = 2 & j = 1, 2, 3, ..., i = 3 & j = 1, 2, 3, ... dan seterusnya.
3. Jika dalam langkah 2 ditemui nilai $\psi_{i,j}$ yang belum diketahui, gunakan nilai tebakan.
4. Ulangi langkah 2 – 3 sampai dicapai kestabilan untuk nilai $\psi_{i,j}$ di semua titik:

   $$\left|\psi_{i,j}^{\text{(iterasi sebelum)}} - \psi_{i,j}^{\text{(iterasi berikutnya)}}\right| < \varepsilon \text{ (bilangan kecil)}$$

Persamaan Differensial Parabolik

Bentuk umum PD parabolik: $$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

Untuk kasus 2 dimensi: $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t) = -4\pi\rho(x,t)$$

Gunakan metode finite differences:

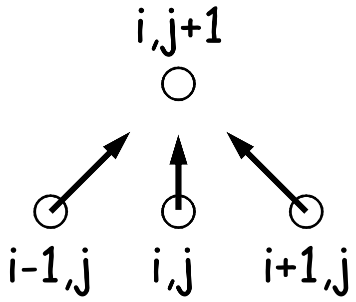
$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\right|_{x_i,t_j} \approx \frac{\psi(x_{i+1},t_j) - 2\psi(x_i,t_j) + \psi(x_{i-1},t_j)}{h_x^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2}$$

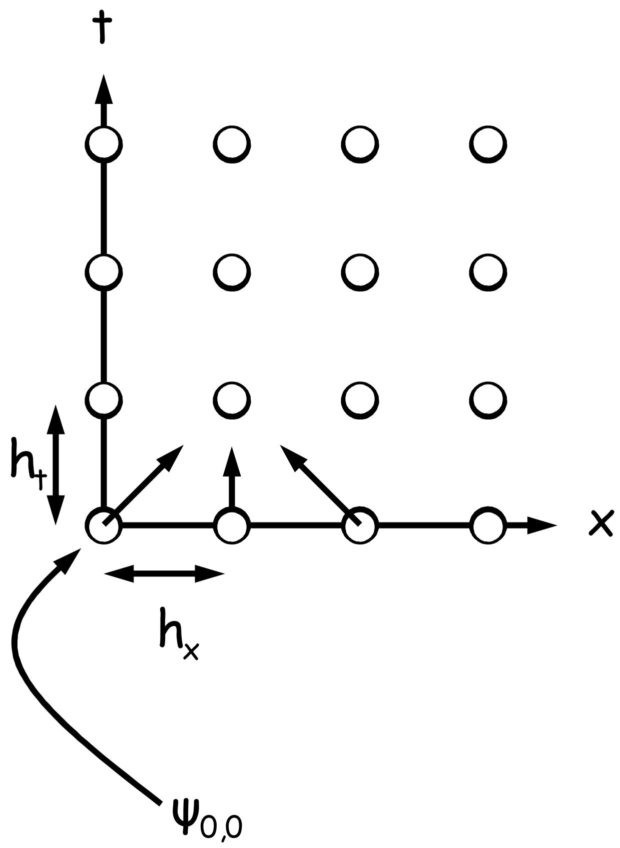
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right|_{x_i,t_j} \approx \frac{\psi(x_i,t_{j+1}) - \psi(x_i,t_j)}{h_t} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_t}$$

$$(h_x = x_{i+1} - x_i,\ h_t = t_{j+1} - t_j)$$

Untuk tiap posisi dicari perubahan ψ terhadap waktu.

Diperoleh: $$\boxed{\psi_{i,j+1} = 4\Gamma h_t \pi \rho_{i,j} + \psi_{i,j} + \frac{\Gamma h_t}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)}$$





Langkah:

1. Buat grid pada bidang xt, dengan lebar h_x untuk arah x dan h_t untuk arah t.
2. (Dianggap nilai awal dan nilai pada batas-batas daerah x diketahui.)

   Hitung dengan rumus :

$$\psi_{i,j+1} = 4\Gamma h_t \pi \rho_{i,j} + \psi_{i,j} + \frac{\Gamma h_t}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)$$

   secara berurutan $\psi_{i,j+1}$ untuk j = 0 & i = 1, 2, 3, ..., lalu j = 1 & i = 1, 2, 3, ..., j = 2 & i = 1, 2, 3, ... dan seterusnya.

Kasus khusus:

Jika ρ dan nilai pada batas-batas daerah x tetap (tidak bergantung waktu), maka akan tercapai suatu waktu t, bahwa $\psi_{i,j+1}$ tidak berubah lagi (atau berubah hanya sedikit, sehingga dapat diabaikan):

$$\left|\psi_{i,j+2} - \psi_{i,j+1}\right| < \varepsilon \text{ (bilangan kecil)}$$

Persamaan Differensial Hiperbolik

Bentuk umum PD hiperbolik: $$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

Untuk kasus 2 dimensi: $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = -4\pi\rho(x,t)$$

Gunakan metode finite differences:

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\right|_{x_i,t_j} \approx \frac{\psi(x_{i+1},t_j) - 2\psi(x_i,t_j) + \psi(x_{i-1},t_j)}{h_x^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)\right|_{x_i,t_j} \approx \frac{\psi(x_i,t_{j+1}) - 2\psi(x_i,t_j) + \psi(x_i,t_{j-1})}{h_t^2} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_t^2}$$

$$(h_x = x_{i+1} - x_i,\ h_t = t_{j+1} - t_j)$$

Diperoleh: $$\boxed{\psi_{i,j+1} = 4c^2h_t^2\pi\rho_{i,j} + 2\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1} + \frac{c^2h_t^2}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)}$$

Untuk tiap posisi dicari perubahan ψ terhadap waktu.

Untuk j = 0 diperoleh $\psi_{i,1}$ sebagai berikut:

$$\psi_{i,1} = 4c^2h_t^2\pi\rho_{i,0} + 2\psi_{i,0} - \psi_{i,-1} + \frac{c^2h_t^2}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,0} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i-1,0}\right)$$

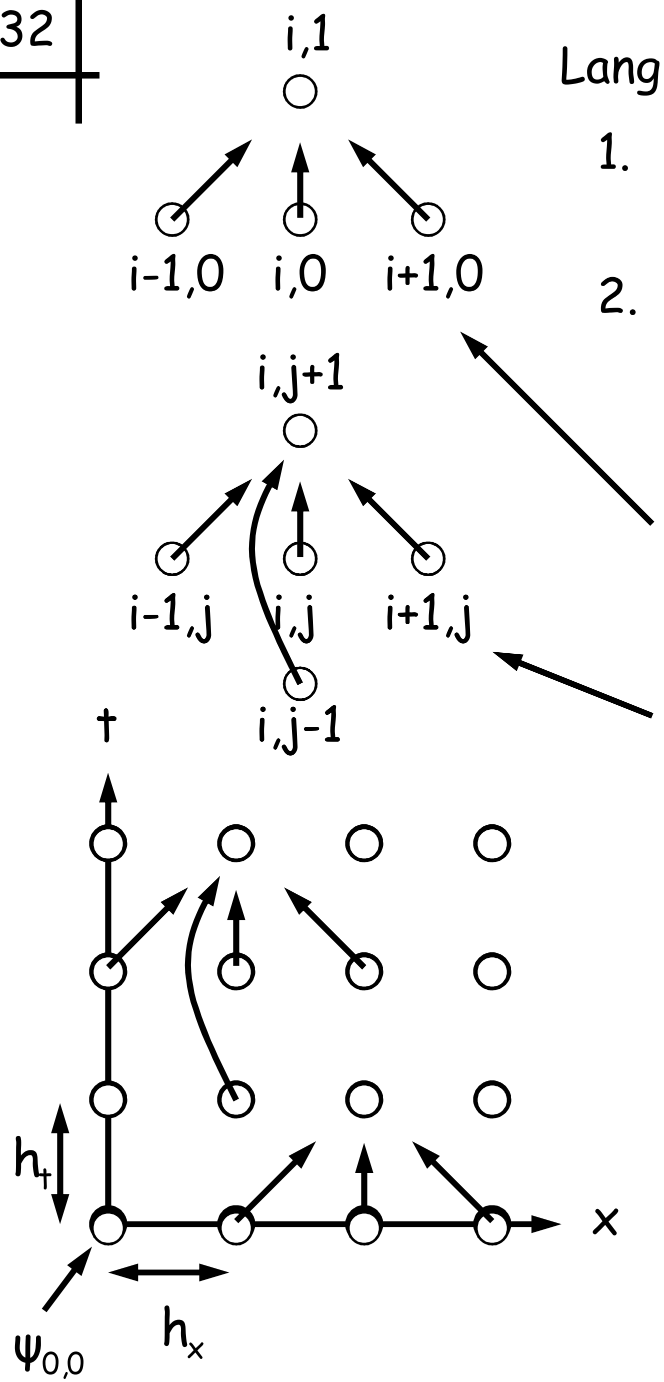
?

Anggap $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$ pada semua x dan t = 0 diketahui: $\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right|_{x_i,t_0} = b_i$

Maka gunakan: $\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right|_{x_i,t_0} \approx \frac{\psi(x_i,t_1) - \psi(x_i,t_{-1})}{2h_t} = \frac{\psi_{i,1} - \psi_{i,-1}}{2h_t}$, shg: $\psi_{i,-1} = \psi_{i,1} - 2b_ih_t$

Dengan demikian:

- untuk j = 0: $\psi_{i,1} = 2c^2h_t^2\pi\rho_{i,0} + b_ih_t + \psi_{i,0} + \frac{c^2h_t^2}{2h_x^2}\left(\psi_{i+1,0} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i-1,0}\right)$
- untuk j > 0: $\psi_{i,j+1} = 4c^2h_t^2\pi\rho_{i,j} + 2\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1} + \frac{c^2h_t^2}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)$



Langkah:

1. Buat grid pada bidang xt, dengan lebar h_x untuk arah x dan h_t untuk arah t.
2. (Dianggap nilai awal dan nilai pada batas-batas daerah x diketahui.)

   Hitung dengan rumus :

$$\psi_{i,1} = 2c^2 h_t^2 \pi \rho_{i,0} + b_i h_t + \psi_{i,0} + \frac{c^2 h_t^2}{2h_x^2}\left(\psi_{i+1,0} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i-1,0}\right)$$

$$\psi_{i,j+1} = 4c^2 h_t^2 \pi \rho_{i,j} + 2\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1} + \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)$$

secara berurutan $\psi_{i,j+1}$ untuk j = 0 & i = 1, 2, 3, ..., lalu j = 1 & i = 1, 2, 3, ..., j = 2 & i = 1, 2, 3, ... dan seterusnya.