Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Persamaan Differensial

Persamaan differensial (PD) yang dibahas meliputi persamaan differensial biasa dan persamaan differensial parsial.

Beberapa persamaan differensial merupakan juga persamaan eigenvalue, contoh persamaan untuk senar gitar (gelombang berdiri). Karena itu, akan dibahas juga persamaan eigenvalue.

Persamaan Differensial Biasa

Pada bagian ini disampaikan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa orde 1 dan 2. Dua masalah yang akan dibahas yaitu:

- PD dengan syarat awal
- PD dengan syarat batas

PD dengan Syarat Awal

PD Orde 1

Bentuk umum PD orde 1: $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

Diketahui: $y(x_0) = y_0 \longrightarrow y(x) = ?$

Integrasi: $\displaystyle\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$

$$\downarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

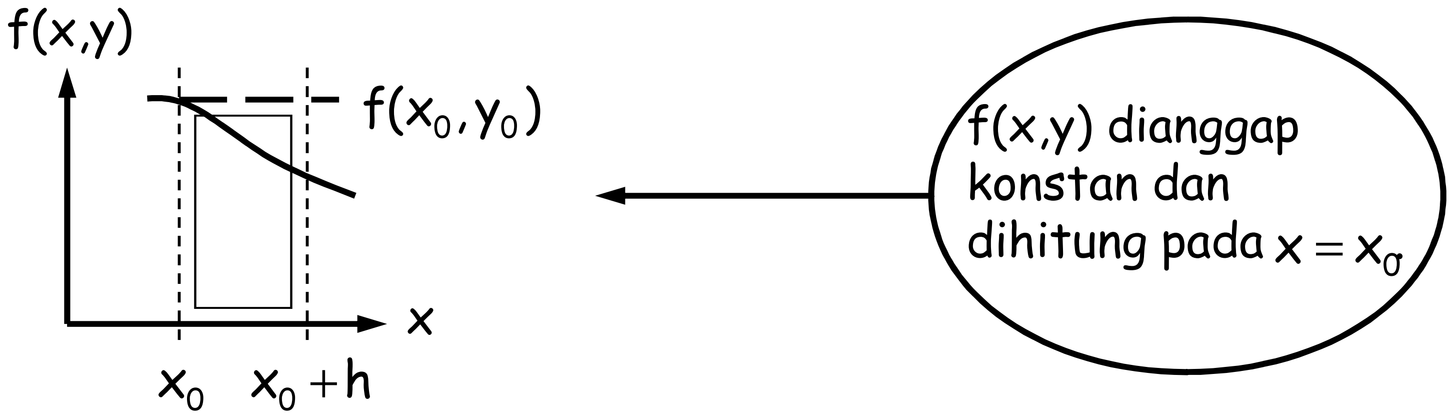
Masalah persamaan differensial berubah menjadi masalah persamaan integral.

Dicari y(x) pada titik $x = x_0 + h$: $\boxed{y(x_0 + h) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx}$

Setelah $y(x_0 + h)$ didapat, selanjutnya dicari $y(x_0 + 2h)$. Demikian seterusnya.

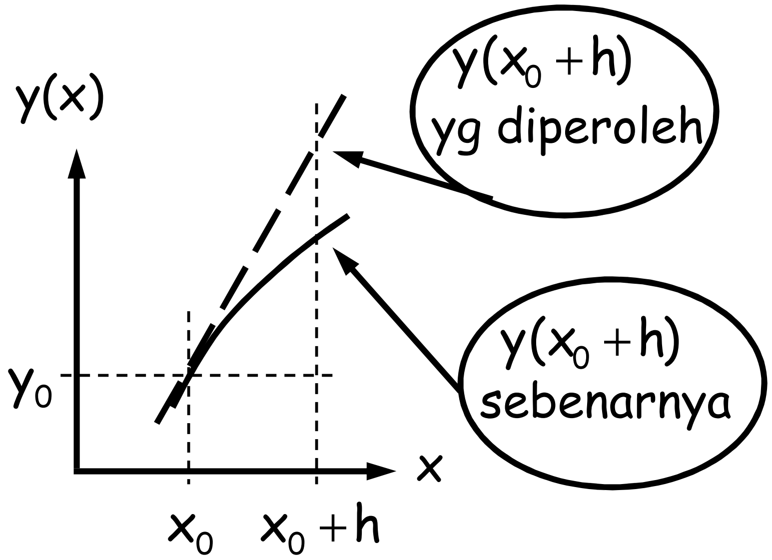
Metode Euler

Menurut metode Euler:



Diperoleh:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0+h) &\cong y_0 + f(x_0,y_0)\int_{x_0}^{x_0+h} dx \\ &\cong y_0 + hf(x_0,y_0) \end{aligned}}$$



Metode Euler yang Dimodifikasi

Modifikasi dilakukan dalam memilih nilai f(x,y) yang dianggap konstan. Dipilih f(x,y) pada titik $x = x_0 + \frac{1}{2}h$:

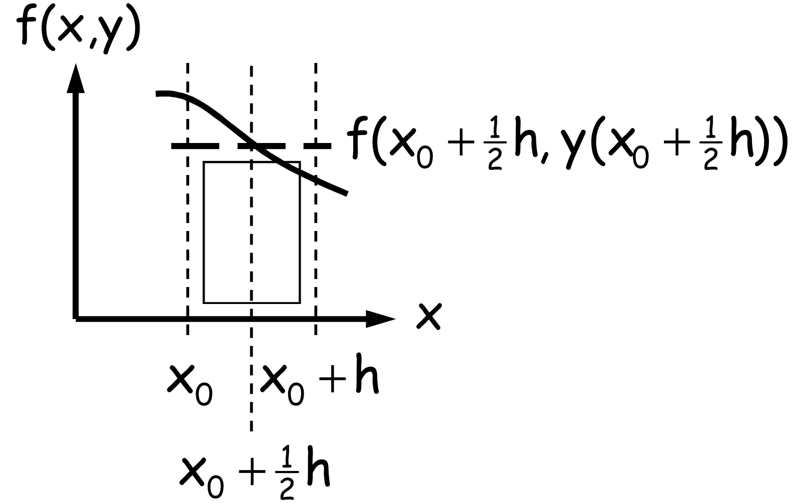
$$f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y(x_0 + \tfrac{1}{2}h))$$

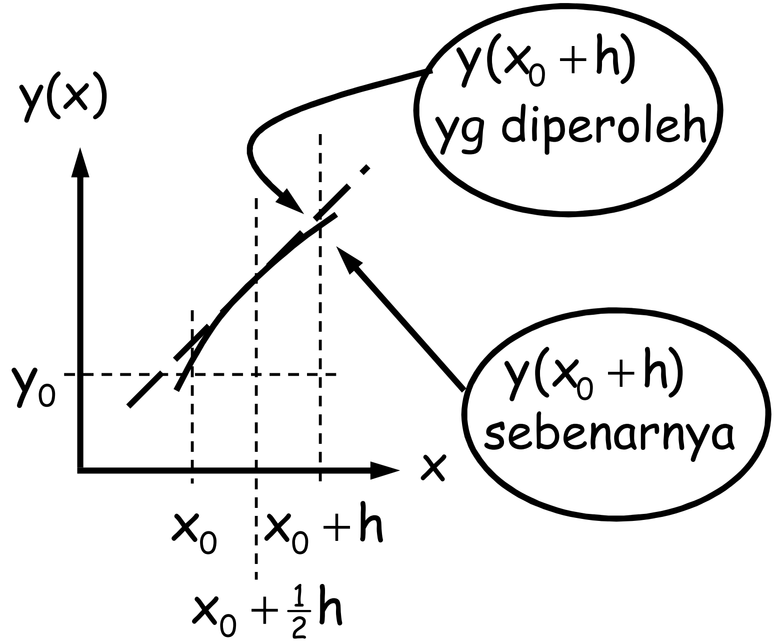
dengan $y(x_0 + \frac{1}{2}h)$ dihitung memakai metode Euler:

$$y(x_0 + \tfrac{1}{2}h) \cong y_0 + \tfrac{1}{2}hf(x_0, y_0)$$

Diperoleh:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0 + h) &\cong y_0 + hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y(x_0 + \tfrac{1}{2}h)) \\ &\cong y_0 + hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hf(x_0, y_0)) \end{aligned}}$$

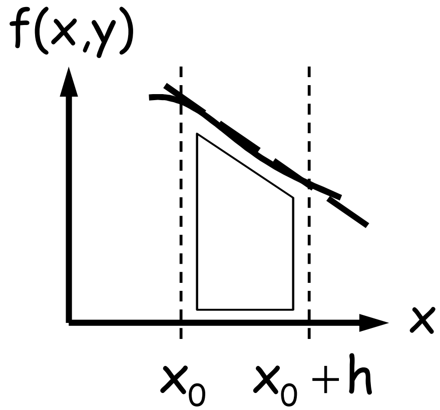




Metode Euler yang Lebih Baik (Improved)

Kali ini dipakai nilai f(x,y) yang merupakan rata-rata dari dua nilai f(x,y), masing-masing pada titik x_0 dan x_0+h :

$$\tfrac{1}{2}\left[f(x_0,y_0)+f(x_0+h,y(x_0+h))\right]$$



Ini sama dengan menggunakan quadrature trapezoid untuk mengevaluasi integral:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx \cong \tfrac{1}{2}h\left[f(x_0,y_0)+f(x_0+h,y(x_0+h))\right]$$

dengan $y(x_0+h)$ dihitung memakai metode Euler:

$$y(x_0+h)\cong y_0+hf(x_0,y_0)$$

Diperoleh:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0+h) &\cong y_0+\tfrac{1}{2}h\left[f(x_0,y_0)+f(x_0+h,y(x_0+h))\right] \\ &\cong y_0+\tfrac{1}{2}h\left[f(x_0,y_0)+f(x_0+h,y_0+hf(x_0,y_0))\right] \end{aligned}}$$

Metode Runge-Kutta

Metode Euler dan variasinya sebelum ini sebetulnya termasuk metode Runge-Kutta, yang menyatakan solusi PD y(x) dalam turunannya f(x,y), yang dihitung untuk argumen x,y yang bervariasi. Sebuah metode Runge-Kutta disebut berorde n jika memiliki suku koreksi $O(h^{n+1})$ (diperoleh dari ekspansi Taylor):

$$y(x_0 + h) = y_{diperoleh} + O(h^{n+1})$$

Menurut hal itu, metode Euler merupakan metode Runge-Kutta orde 1 sedangkan metode Euler yang dimodifikasi dan yang lebih baik (improved) merupakan metode Runge-Kutta orde 2:

Euler : $y(x_0 + h) = y_0 + hf(x_0, y_0) + O(h^2)$

Euler yg dimodifikasi: $y(x_0 + h) = y_0 + hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0)) + O(h^3)$

Euler yg lebih baik : $y(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{2}h\left[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))\right] + O(h^3)$

Metode Runge-Kutta yang paling banyak digunakan orang yaitu berorde 4, yang sering diingat sebagai metode Runge-Kutta tanpa tambahan keterangan 'orde 4'.

Untuk mendapatkan rumus metode Runge-Kutta orde 4, orang bisa memulai dengan mengevaluasi integral f(x,y) memakai quadrature Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx \cong \tfrac{1}{6}h\left[f(x_0,y_0)+4f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y(x_0+\tfrac{1}{2}h))+f(x_0+h, y(x_0+h))\right]$$

$$\cong \tfrac{1}{6}h\left(f_0+2f_1+2f_2+f_3\right)$$

dengan:

$$f_0 = f(x_0,y_0) \qquad f_2 = f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y(x_0+\tfrac{1}{2}h))$$

$$f_1 = f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y(x_0+\tfrac{1}{2}h)) \qquad f_3 = f(x_0+h, y(x_0+h))$$

f_1 dan f_2 memiliki nilai berbeda, karena dihitung untuk nilai argumen $y(x_0+\tfrac{1}{2}h)$ yang berbeda: menurut metode Euler, $y(x_0+\tfrac{1}{2}h)$ dapat diperoleh melalui 2 persamaan:

(1) $y(x_0+\tfrac{1}{2}h) \cong y_0+\tfrac{1}{2}hf_0 \longrightarrow f_1 = f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hf_0)$

atau

(2) $y_0 \cong y(x_0+\tfrac{1}{2}h)-\tfrac{1}{2}hf(x_0+\tfrac{1}{2}h, y(x_0+\tfrac{1}{2}h))$

$\cong y(x_0+\tfrac{1}{2}h)-\tfrac{1}{2}hf(x_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hf_0)$

$\longrightarrow y(x_0+\tfrac{1}{2}h) \cong y_0+\tfrac{1}{2}hf_1 \longrightarrow f_2 = f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hf_1)$

Untuk f_3 , digunakan metode Euler yang dimodifikasi untuk mencari $y(x_0+h)$:

$$\begin{aligned} y(x_0+h) &\cong y_0 + hf(x_0+\tfrac{1}{2}h, y(x_0+\tfrac{1}{2}h)) \\ &\cong y_0 + hf(x_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hf_1) \\ &\cong y_0 + hf_2 \longrightarrow \quad f_3 = f(x_0+h, y_0+hf_2) \end{aligned}$$

Jadi, menurut metode Runge-Kutta orde 4:

$$\boxed{y(x_0+h) = y_0 + \tfrac{1}{6}h\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3\right)}$$

dengan:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_0 = f(x_0, y_0) & f_2 = f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hf_1) \\ f_1 = f(x_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hf_0) & f_3 = f(x_0+h, y_0+hf_2) \end{array}}$$

Berangkat dengan quadrature Simpson, orang juga bisa memperoleh rumus metode Runge-Kutta orde 3:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx \cong \tfrac{1}{6}h\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$

dengan: $f_0 = f(x_0, y_0)$ $\quad f_1 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y(x_0 + \tfrac{1}{2}h))$ $\quad f_2 = f(x_0 + h, y(x_0 + h))$

$y(x_0 + \tfrac{1}{2}h)$ dicari dengan metode Euler dan $y(x_0 + h)$ dengan metode Euler yang dimodifikasi:

$$y(x_0 + \tfrac{1}{2}h) \cong y_0 + \tfrac{1}{2}hf_0 \longrightarrow f_1 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hf_0)$$

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + hf_1 \longrightarrow f_2 = f(x_0 + h, y_0 + hf_1)$$

Jadi, menurut metode Runge-Kutta orde 3:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y_0 + \tfrac{1}{6}h\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) \\ f_0 &= f(x_0, y_0) \\ f_1 &= f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hf_0) \\ f_2 &= f(x_0 + h, y_0 + hf_1) \end{aligned}}$$