Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Quadrature Gaussian

Quadrature Gaussian memanfaatkan polinomial yang memiliki sifat orthogonal dan ternormalisasi sebagai berikut:

$$\int_a^b v(x) O_n(x) O_m(x)\, dx = \delta_{nm}, \qquad O_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

Contoh:

$$O_n = \sqrt{\tfrac{2n+1}{2}} P_n, \quad P_n = \text{ polinomial Legendre } \longrightarrow \int_{-1}^{1} O_n(x) O_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

$$O_n = \tfrac{1}{n!} L_n, \quad L_n = \text{ polinomial Laguerre } \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} O_n(x) O_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

Dengan quadrature Gaussian, dievaluasi integral berbentuk:

$$\int_a^b v(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i) \longrightarrow w_i, x_i = ?$$

Mencari x_i:

Anggap integrand f(x) merupakan polinomial orde 2N-1 (atau katakan saja f(x) diinterpolasi dengan polinomial p(x) orde 2N-1):

$$f(x) \cong p(x) = \sum_{i=0}^{2N-1} a_i x^i = r(x) + s(x) \qquad \text{dengan} \qquad r(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, \quad s(x) = \sum_{i=N}^{2N-1} a_i x^i$$

s(x) bisa ditulis sebagai $s(x) = q(x) O_N(x)$ dengan q(x) polinomial orde N-1:

$$q(x) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i x^i = \sum_{i=0}^{N-1} c_i O_i(x)$$

Maka: $$\int_a^b v(x) s(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \int_a^b v(x) O_i(x) O_N(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \delta_{iN} = 0$$

Secara numerik: $$\int_a^b v(x) s(x) dx = \sum_{i=1}^{N} w_i s(x_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i q(x_i) O_N(x_i) = 0$$

Mengingat q(x) fungsi sembarang, persamaan terakhir dipenuhi hanya jika $O_N(x_i) = 0 \ (i = 1, \ldots, N)$.

$$\boxed{x_i = \text{akar polinomial } O_N(x) \quad (i = 1, \ldots, N)}$$

Mencari w_i:

Untuk integrand f(x) dan s(x), yang merupakan polinomial orde 2N-1 berlaku integrasi numerik:

$$\int_a^b v(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i) \qquad \int_a^b v(x)s(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i s(x_i)$$

Integrasi numerik yang sama tentu berlaku juga untuk integrand polinomial orde lebih rendah, contohnya r(x), yang berorde N-1:

$$\int_a^b v(x)r(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i r(x_i), \qquad r(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i$$

Dari penurunan rumus quadrature trapezoid, Simpson dll sebelum ini diketahui bahwa untuk mencari w_i bisa digunakan r(x) sembarang polinomial orde N-1 (koefisien a_i tidak diperlukan). Karena itu, dipilih r(x) yang memudahkan:

$$r(x) = l(x,x_i) = \prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right), \quad (i,j=1,\ldots,N) \longrightarrow l(x_k,x_i) = \delta_{ik}$$

Diperoleh: $\int_a^b v(x)l(x,x_j)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i l(x_i,x_j) = w_j \longrightarrow \boxed{w_j = \int_a^b v(x)l(x,x_j)dx \quad (j=1,\ldots,N)}$

Pada integrasi numerik Gaussian, diperlukan N buah titik evaluasi x_i untuk integrand $f(x) \cong p(x)$ polinomial orde 2N-1.

Pada integrasi numerik seperti quadrature trapezoid dan Simpson, diperlukan 2N buah titik x_i untuk integrand $f(x) \cong p(x)$ polinomial orde 2N-1:

trapezoid	: 2N = 2
Simpson	: 2N = 3
Simpson ⅜	: 2N = 4
Boole	: 2N = 5
dst	

Secara umum, dengan begitu, quadrature Gaussian memerlukan titik evaluasi lebih sedikit (separuh) dari yang diperlukan integrasi numerik yang mengikuti cara seperti quadrature trapezoid dan Simpson.

Bergantung pada keperluan, integrasi komposit juga bisa diterapkan menggunakan quadrature Gaussian atau campuran quadrature Gaussian dan yang lain.

Quadrature Gauss-Legendre

Quadrature Gauss-Legendre menggunakan polinomial Legendre P_n :

$$O_n = \sqrt{\tfrac{2n+1}{2}}P_n : \qquad \int_{-1}^{1} O_n(x)O_m(x)\,dx = \delta_{nm}$$

Asalnya, quadrature Gauss-Legendre dipakai untuk integral berbatas [-1,1]:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

Namun dengan mengganti variabel integrasi, quadrature Gauss-Legendre dapat juga dipakai untuk mengevaluasi integral dengan batas bukan [-1,1].

Contoh:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i) = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(y)dy$$

$$\frac{y-a}{b-a} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{x+1}{2}$$

(transformasi linier)

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{a}^{b} f(y)dy &= \sum_{i=1}^{N} u_i f(y_i) \\ y_i &= \tfrac{1}{2}(x_i+1)(b-a)+a \\ u_i &= \left(\frac{b-a}{2}\right)w_i \end{aligned}}$$

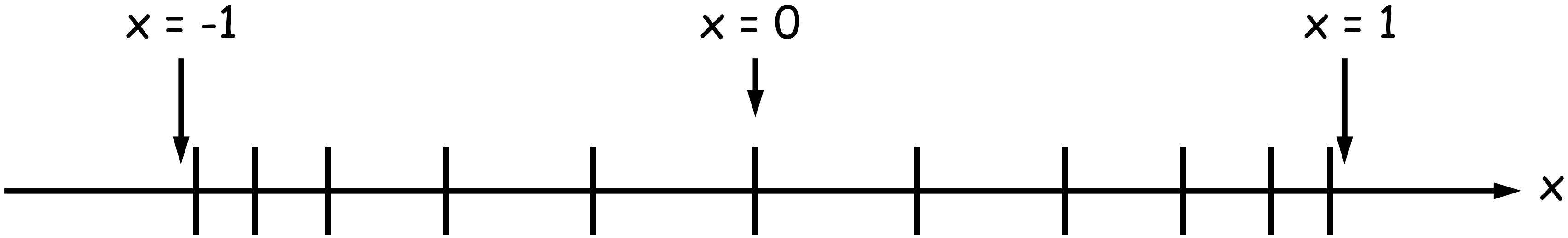
Contoh x_i dan w_i quadrature Gauss-Legendre untuk beberapa N terkecil:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

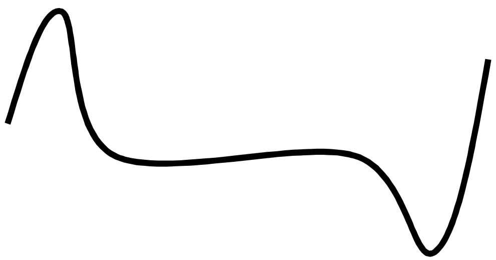
N	x	w
2	$\pm$ 0.577350269189626	1.000000000000000
3	$\pm$ 0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	$\pm$ 0.861136311594053	0.347854845137454
	$\pm$ 0.339981043584856	0.652145154862546
5	$\pm$ 0.906179845938664	0.236926885056189
	$\pm$ 0.538469310105683	0.478628670499367
	0.000000000000000	0.568888888888889

Distribusi x_i pada quadrature Gauss-Legendre tidak merata seperti distribusi pada quadrature trapezoid dan Simpson. Makin dekat ke batas-batas integral distribusi makin rapat. Distribusi itu simetris terhadap garis x = 0.

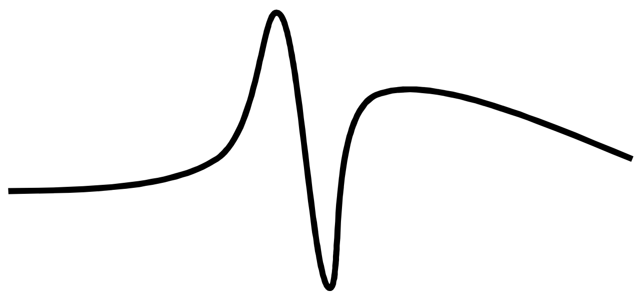
Ilustrasi untuk N = 11:



Distribusi ini lebih cocok untuk integrand f(x) yang bentuk kurvanya lebih tajam di sekitar batas integral, sementara kurang tajam di bagian tengah.



Untuk f(x) yang berkurva tajam di bagian tengah dan kurang tajam di sekitar batas integral diperlukan beberapa penanganan (mis. membagi daerah integrasi, redistribusi x dll).



Quadrature Gauss-Laguerre

Quadrature Gauss-Laguerre menggunakan polinomial Laguerre L_n :

$$O_n = \frac{1}{n!} L_n : \qquad \int_0^\infty e^{-x} O_n(x) O_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

dipakai untuk integral berbentuk: $\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$

Contoh x_i dan w_i quadrature Gauss-Laguerre untuk beberapa N:

N	x	w
2	0.585786437626905	0.853553390593274
	3.414213562373095	0.146446609406726
4	0.322547689619392	0.603154104341634
	1.745761101158347	0.357418692437800
	4.536620296921128	0.038887908515005
	9.395070912301133	0.000539294705561

Lain-Lain

Mengganti Variabel Integrasi

Pada topik quadrature Gauss-Legendre terdapat contoh penggantian variabel integrasi. Penggantian variabel integrasi bisa juga diperlukan pada kasus lain. Tujuannya, agar evaluasi integral menjadi lebih mudah dan hasilnya baik.

Contoh: $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ ⟵ batas integral sampai tak behingga, jika dievaluasi langsung memerlukan sangat banyak titik, tidak praktis dan hasilnya bisa saja buruk

transformasi: $x = \frac{1+y}{1-y}, \quad dx = \frac{2}{(1-y)^2} dy$

$$\longrightarrow \quad I = \int_{-1}^{1} \frac{2dy}{(1-y)^2\left(1+\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2\right)}$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{(1-y)^2 + (1+y)^2} \longrightarrow \text{quadrature Gauss-Legendre}$$

Meringkas Daerah Integrasi

Beberapa fungsi bersifat genap, ini memungkinkan daerah integrasi diringkas menjadi separuhnya (mengurangi jumlah titik evaluasi 2N menjadi N).

fungsi genap: $f(-x) = f(x)$ fungsi ganjil: $f(-x) = -f(x)$

Contoh:

- $$I = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{w_i}{1+x_i^2}$$
  $$= 2\int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = 2\sum_{i=N+1}^{2N} \frac{w_i}{1+x_i^2}$$

- $$I = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{(1-y)^2+(1+y)^2} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{w_i}{(1-y_i)^2+(1+y_i)^2}$$
  $$= 2\int_{0}^{1} \frac{dy}{(1-y)^2+(1+y)^2} = 2\sum_{i=N+1}^{2N} \frac{w_i}{(1-y_i)^2+(1+y_i)^2}$$

Beberapa fungsi memiliki simetri, contoh fungsi trigonometri:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi \pm x) = \mp\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$$

Dengan memanfaatkan relasi simetri di atas batas integrasi sebuah integral tertutup (loop) seperti contoh di bawah dapat diringkas menjadi seperempatnya, sehingga jumlah titik evaluasi berkurang banyak:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[f(\sin(x-a)) + f(\cos(x-a)) \right] e^{im(x-a)} dx$$

integral tertutup bisa dimulai dari titik mana saja

$$= \int_0^{2\pi} \left[f(\sin(x)) + f(\cos(x)) \right] e^{imx} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\{ f(\sin(x)) + f(\cos(x)) \} e^{imx} + \{ f(-\sin(x)) + f(-\cos(x)) \} e^{im(x+\pi)} \right] dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big[f(\sin(x)) \left(e^{imx} + e^{im(\pi - x)} \right) + f(\cos(x)) \left(e^{imx} + e^{im(2\pi - x)} \right)$$
$$+ f(-\sin(x)) \left(e^{im(\pi+x)} + e^{im(2\pi - x)} \right) + f(-\cos(x)) \left(e^{im(\pi+x)} + e^{im(\pi - x)} \right) \Big] dx$$

telah dipakai

$x = x' + \pi$

$x = -x'$

Menangani Singularitas

Kadang ditemui integrand f(x) yang memiliki singularitas dalam daerah integrasi. Salah satu cara menangani singularitas yaitu subtraksi, yang dimulai dengan menambahkan integral bernilai nol pada integral yang dihitung.

Contoh:

- $$I = \int_0^a \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$ ← singular pada x = 0

$$= \int_0^a \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} - \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ ← ditambah nol

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx + \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ ← subtraksi pada integral asal

$$= -\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx + 2\sqrt{a}$$

- $$I = \int_0^a \frac{x^2 f(x)dx}{(b^2 - x^2)} \qquad (0 < b^2 \le a^2)$$ singular pada x = b

$$= \int_0^a \frac{x^2 f(x)dx}{(b^2 - x^2)} - \int_0^\infty \frac{b^2 f(b)dx}{(b^2 - x^2)}$$ ditambah nol (lihat *)

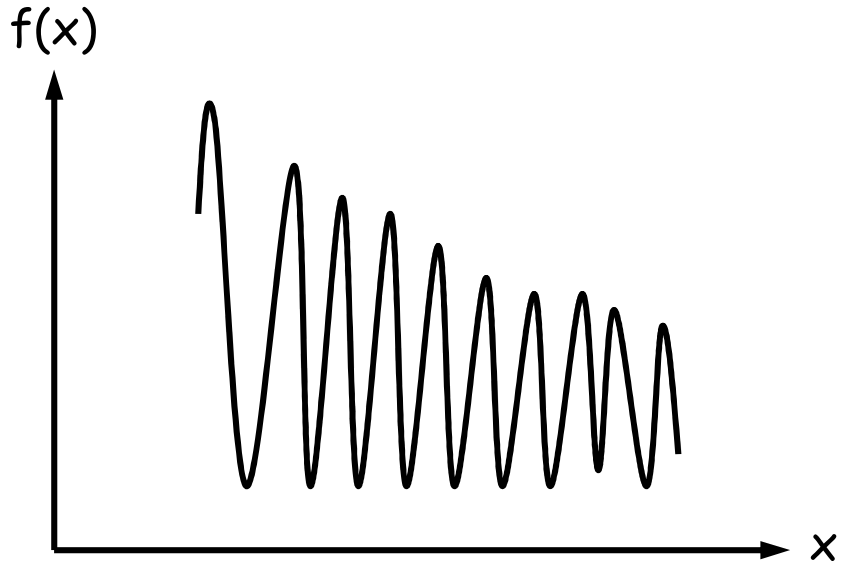
$$= \int_0^a \frac{\left(x^2 f(x) - b^2 f(b)\right)dx}{(b^2 - x^2)} - \int_a^\infty \frac{b^2 f(b)dx}{(b^2 - x^2)}$$ subtraksi pada integral asal

$$= \int_0^a \frac{\left(x^2 f(x) - b^2 f(b)\right)dx}{(b^2 - x^2)} - \frac{1}{2} b f(b) \ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$$

(*) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(b^2 - x^2)} = \frac{1}{2b}\int_0^\infty \left(\frac{1}{b-x} + \frac{1}{b+x}\right)dx = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{b+x} = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x} = 0$$

Quadrature Filon

Bisa saja ditemui integrand f(x) yang sangat berosilasi; dalam jarak yang pendek f(x) berubah-ubah naik turun. Dengan macam-macam quadrature yang sudah disampaikan, integrasi menjadi sulit karena dibutuhkan banyak sekali titik evaluasi. Integral seperti ini dapat dihitung dengan menggunakan rumus quadrature Filon (M. Abramowitz & I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Function, Dover Publications, Inc., NY, 1972).



Quadrature Filon (tanpa suku kesalahan, yang bisa diabaikan):

$$\int_a^b f(x)\cos(tx)dx = h\left[\alpha(th)(f_{2n}\sin(tb) - f_0\sin(ta)) + \beta(th)C_{genap} + \gamma(th)C_{ganjil}\right]$$

$$C_{genap} = \sum_{i=0}^{n} f_{2i}\cos(tx_{2i}) - \tfrac{1}{2}\left(f_{2n}\cos(tb) + f_0\cos(ta)\right)$$

$$C_{ganjil} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}\cos(tx_{2i-1})$$

$$\left(\begin{array}{l} h = \dfrac{b-a}{2n} = x_{i+1} - x_i \\ x_0 = a \\ f_j = f(x_j) \end{array}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\sin(tx)dx = h\left[\alpha(th)(f_0\cos(ta) - f_{2n}\cos(tb)) + \beta(th)S_{genap} + \gamma(th)S_{ganjil}\right]$$

$$S_{genap} = \sum_{i=0}^{n} f_{2i}\sin(tx_{2i}) - \tfrac{1}{2}\left(f_{2n}\sin(tb) + f_0\sin(ta)\right)$$

$$S_{ganjil} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}\sin(tx_{2i-1})$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sin(2x)}{2x^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^3}$$

$$\beta(x) = 2\left(\frac{1+\cos^2 x}{x^2} - \frac{\sin(2x)}{x^3}\right)$$

$$\gamma(x) = 4\left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}\right)$$

untuk nilai x kecil:

$$\alpha(x) = \frac{2x^3}{45} - \frac{2x^5}{315} + \frac{2x^7}{4725} - \ldots$$

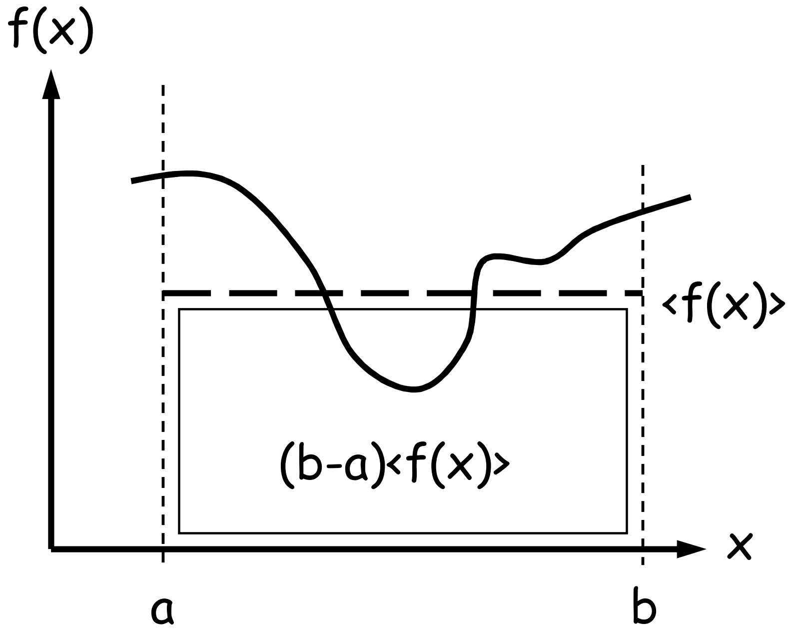
$$\beta(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x^2}{15} - \frac{4x^4}{105} + \frac{2x^6}{567} - \ldots$$

$$\gamma(x) = \frac{4}{3} - \frac{2x^2}{15} + \frac{x^4}{210} - \frac{x^6}{11340} + \ldots$$

Integrasi Monte Carlo

Mungkin saja cara-cara integrasi numerik yang sudah disampaikan sulit atau tidak bisa diterapkan untuk mengevaluasi suatu integral. Pada keadaan ini, integrasi Monte Carlo dapat dipilih.

Integrasi Monte Carlo tidak menggunakan interpolasi seperti pada cara-cara integrasi numerik sebelum ini. Integral dianggap sebagai satu persegi panjang, dengan lebar daerah integrasi dan tinggi nilai rata-rata integrand f(x), yang diperoleh melalui statistik dengan memanfaatkan bilangan acak:



$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$x_i = \text{bilangan acak}: \quad a \le x_i \le b$$

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}$$