Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

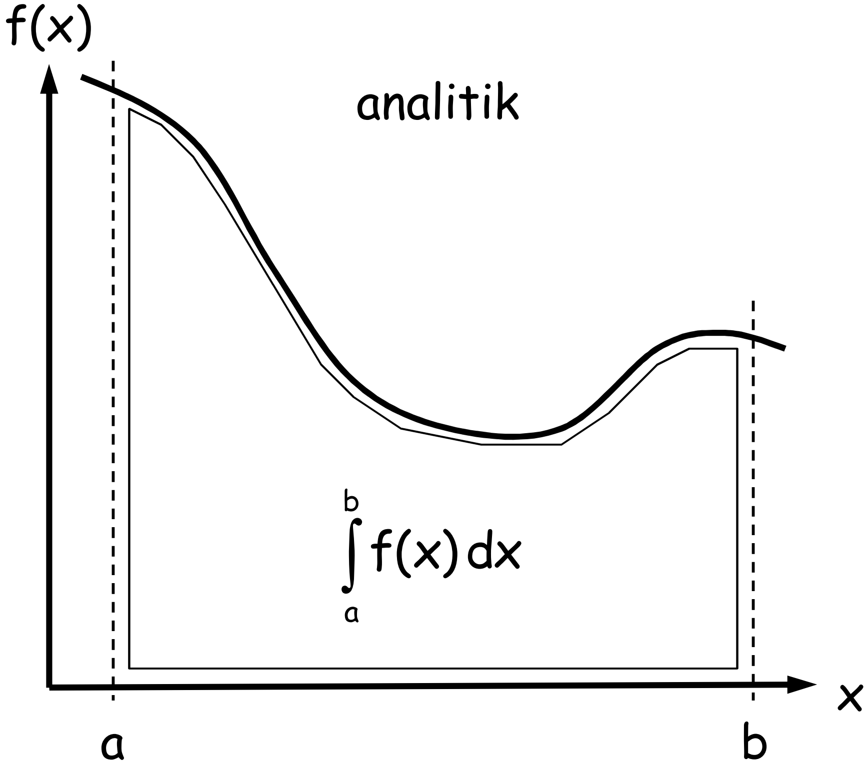
- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

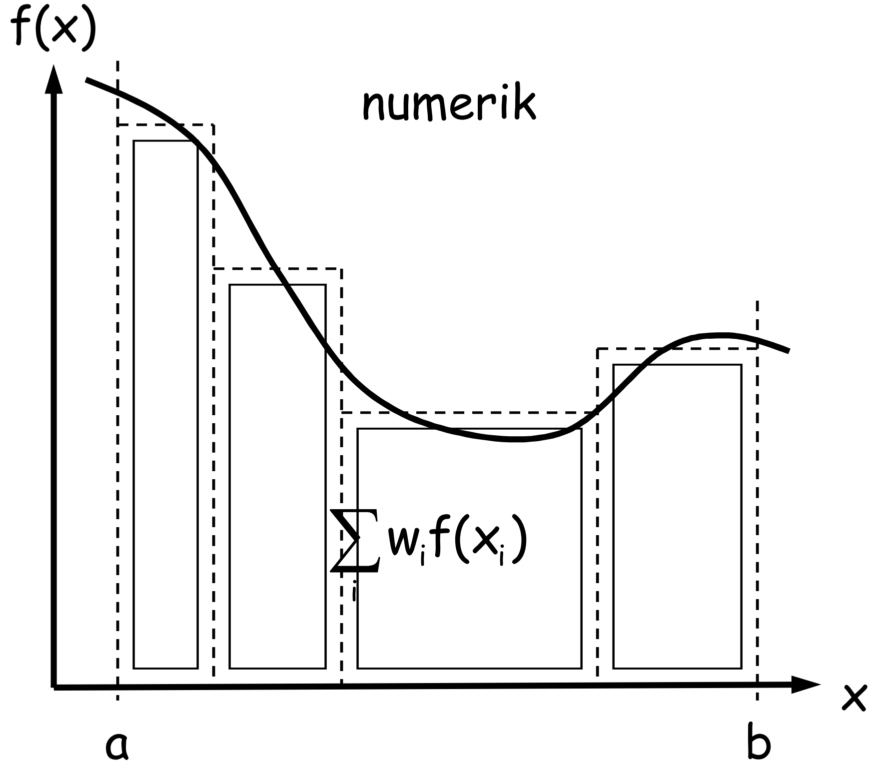
  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Integrasi

Menghitung luas daerah di bawah kurva:





$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)}$$ → Integral numerik sering disebut juga sebagai quadrature; integrasi numerik disebut sebagai integrasi dgn menjumlah quadrature.

Meski tidak terlihat pada rumus akhir, pada integrasi numerik integrand f(x) diinterpolasi dengan suatu polinomial:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

$$f(x) \cong p(x) \longleftarrow \text{polinomial}$$

Dilihat dari titik-titik x_i tempat integrand f(x) dihitung, ada teknik integrasi numerik yang menggunakan x_i berjarak tetap dan ada yang memakai x_i berjarak tidak tetap.

Contoh (akan dibahas):

- quadrature trapezoid, Simpson menggunakan x_i berjarak sama,
- quadrature Gaussian menggunakan x_i berjarak tidak sama.

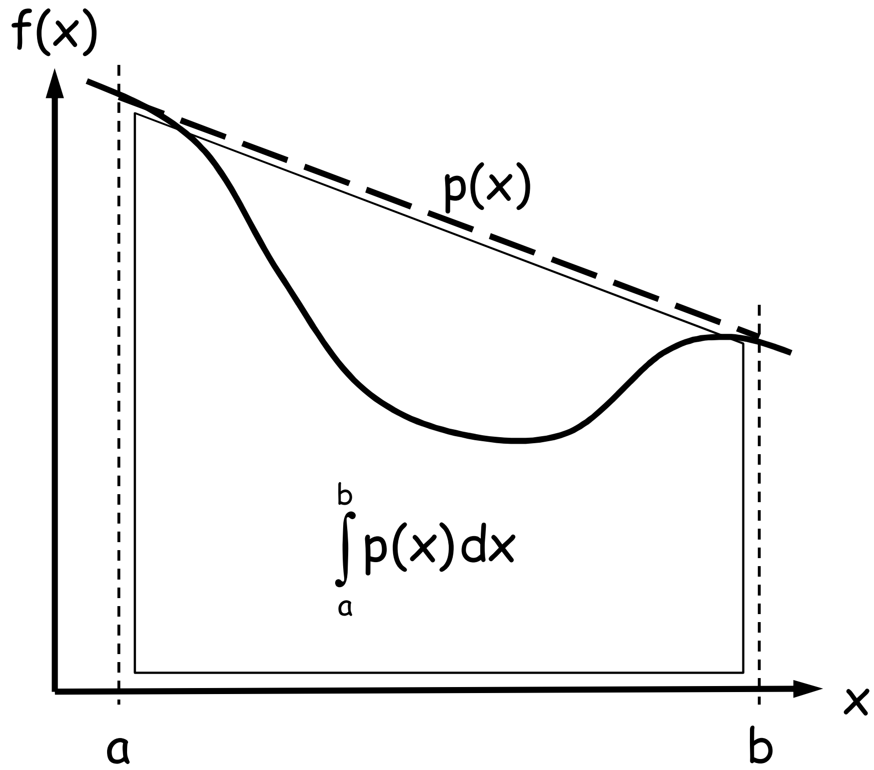
Quadrature Trapezoid

Kurva integrand f(x) diinterpolasi dengan sebuah garis lurus (f(x) diinterpolasi dengan fungsi linier / polinomial orde 1):

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} w_i p(x_i), \qquad p(x) = r + sx$$

Untuk menarik garis lurus diperlukan minimal 2 titik, dipilih titik f(a) dan f(b):

$$p(a) = f(a), \;\; p(b) = f(b)$$



Dengan diketahui hanya p(a) dan p(b) (r dan s tidak dicari), maka integrasi numerik dikerjakan untuk N = 2:

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{2} w_i p(x_i) = w_1 p(x_1) + w_2 p(x_2) = w_1 p(a) + w_2 p(b) \longrightarrow w_1, w_2 = ?$$

Mencari w_1 dan w_2 :

$$p(x) = r + sx \longrightarrow \int_a^b (r+sx)\,dx = w_1(r+sa) + w_2(r+sb)$$

$$r(b-a) + \frac{1}{2}s(b^2 - a^2) = r(w_1 + w_2) + s(aw_1 + bw_2)$$

$$\begin{aligned} w_1 + \ \ w_2 &= b - a \\ aw_1 + bw_2 &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned} \longrightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{2}(b-a)$$

Rumus quadrature trapezoid: $\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}$ $(h = b - a)$

luas trapezoid (lihat gambar)

Quadrature Simpson & Boole

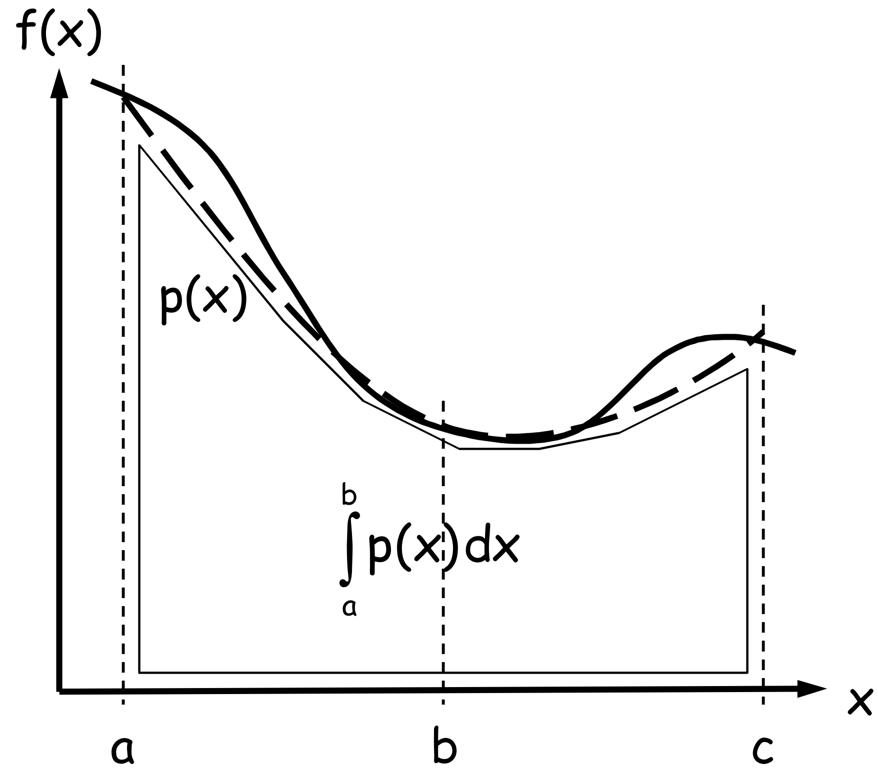
Cara yang sama seperti pada quadrature trapezoid bisa dipakai untuk polinomial p(x) orde lebih tinggi. Contoh, quadrature Simpson memakai p(x) fungsi kuadratik / polinomial orde 2 untuk menginterpolasi integrand f(x):

$$I = \int_a^c f(x)\,dx \cong \int_a^c p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} w_i p(x_i), \qquad p(x) = r + sx + tx^2$$

Untuk membuat kurva kuadratik diperlukan minimal 3 titik, dipilih titik f(a), f(b) dan f(c):

$$p(a) = f(a),\ \ p(b) = f(b),$$
$$p(c) = f(c)$$

dengan $b = \dfrac{a+c}{2}$



Integrasi numerik dikerjakan untuk N = 3:

$$\int_a^c p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{3} w_i p(x_i) = w_1 p(a) + w_2 p(b) + w_3 p(c) \longrightarrow w_1, w_2, w_3 = ?$$

Mencari w_1, w_2, w_3:

$$p(x) = r + sx + tx^2$$

$$\begin{aligned}
\int_a^c (r + sx + tx^2)\,dx &= w_1(r + sa + ta^2) + w_2(r + sb + tb^2) \\
&\quad + w_3(r + sc + tc^2) \\
r(c\text{-}a) + \frac{1}{2}s(c^2 - a^2) + \frac{1}{3}t(c^3 - a^3) &= r(w_1 + w_2 + w_3) + s(aw_1 + bw_2 + cw_3) \\
&\quad + t(a^2 w_1 + b^2 w_2 + c^2 w_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 + w_3 &= c\text{-}a \\
aw_1 + bw_2 + cw_3 &= \frac{1}{2}(c^2 - a^2) \\
a^2 w_1 + b^2 w_2 + c^2 w_3 &= \frac{1}{3}(c^3 - a^3)
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
w_1 = w_3 &= \frac{1}{6}(c - a) \\
w_2 &= \frac{2}{3}(c - a)
\end{aligned}$$

Diperoleh Rumus quadrature Simpson: $$\boxed{I = \int_a^c f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(b) + f(c)\right)}$$

dengan $h = \dfrac{c-a}{2}$ yaitu jarak antar titik x_i tempat f(x) dihitung: $h = b - a = c - b$

Dengan cara yang sama, menggunakan p(x) polinomial orde 3 diperoleh rumus quadrature Simpson ⅜ :

$$\boxed{I = \int_a^d f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3f(b) + 3f(c) + f(d)\right)} \qquad \left(h = \frac{d-a}{3} = b - a = c - b = d - c\right)$$

dan dengan p(x) polinomial orde 4 rumus quadrature Boole:

$$\boxed{I = \int_a^e f(x)\,dx \cong \frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32f(b) + 12f(c) + 32f(d) + 7f(e)\right)} \qquad \left(\begin{aligned} h = \frac{e-a}{4} &= b - a \\ &= c - b \\ &= d - c \\ &= e - d \end{aligned}\right)$$

Integrasi Komposit

Polinomial orde rendah memadai untuk menginterpolasi sebuah fungsi dalam daerah yang sempit. Untuk daerah yang lebar diperlukan orde yang lebih tinggi. Alternatif lain yaitu, membagi daerah fungsi yang lebar itu dalam beberapa daerah yang sempit, lalu di tiap daerah yang sempit itu digunakan polinomial orde rendah untuk interpolasi.

Quadrature trapezoid dan Simpson pada dasarnya memadai untuk daerah integrasi yang sempit, namun dengan membagi daerah integrasi dalam beberapa daerah yang sempit, maka quadrature trapezoid dan Simpson bisa dipakai juga untuk daerah integrasi yang lebar. Integral total merupakan jumlah semua integral untuk daerah yang sempit. Integrasi seperti ini disebut integrasi komposit.

Bergantung pada integrand f(x), daerah integrasi yang lebar bisa dibagi dalam beberapa daerah sempit yang sama atau berbeda panjang. Juga, semua integral untuk daerah yang sempit bisa dihitung menurut rumus quadrature yang sama, misal semuanya trapezoid, atau berbeda-beda, sesuai kurva di tiap daerah sempit itu. Kasus sederhana yaitu, bila daerah integrasi dibagi sama panjang dan untuk tiap daerah digunakan rumus quadrature yang sama.

Contoh, daerah integrasi [a,b] dibagi dalam N bagian sama panjang.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+d} f(x)\,dx + \int_{a+d}^{a+2d} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-2d}^{b-d} f(x)\,dx + \int_{b-d}^{b} f(x)\,dx \qquad \left(d = \frac{b-a}{N}\right)$$

- integrasi komposit menggunakan quadrature trapezoid

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong h\left[\tfrac{1}{2}\left(f_0 + f_N\right) + f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right]$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad f_i = f(a+ih), \quad i = 0,\ldots,N$$

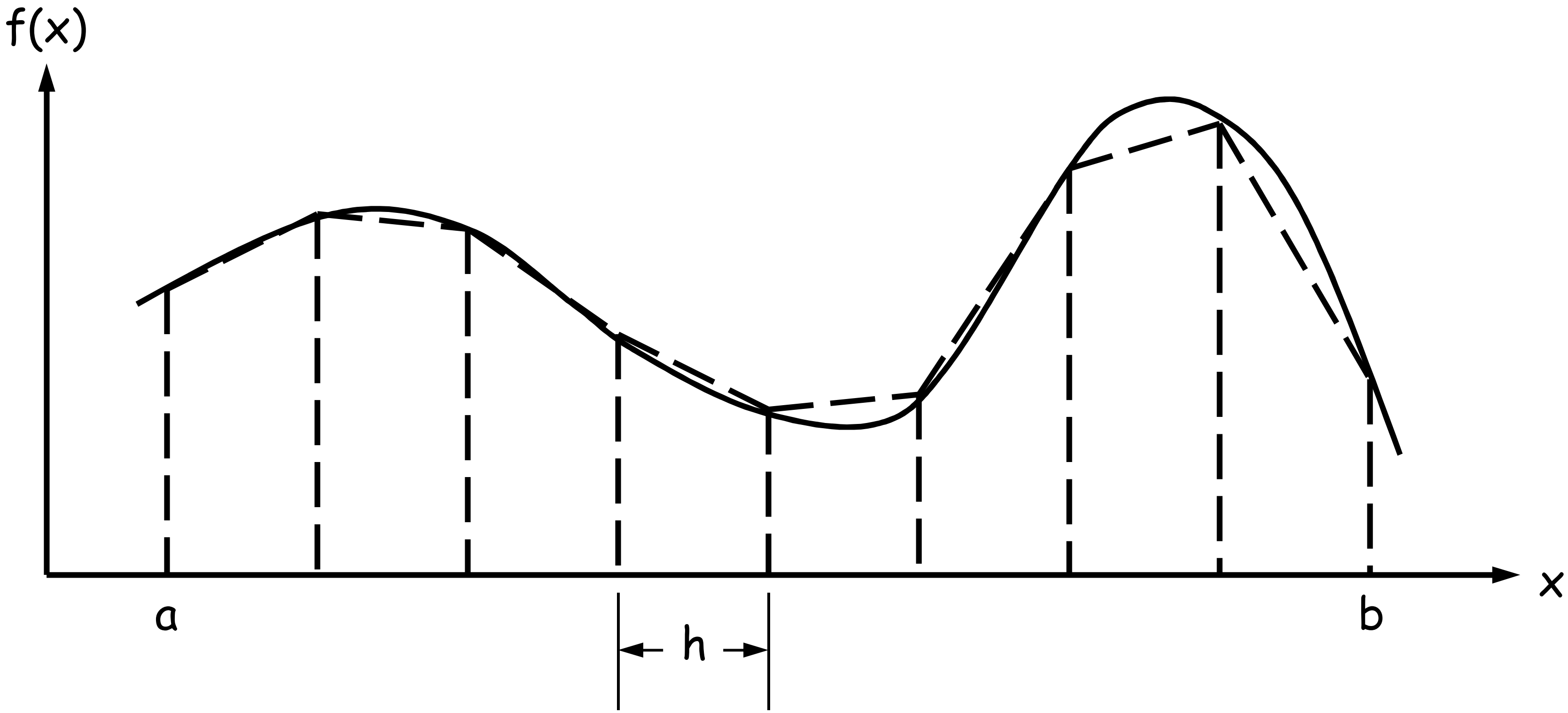
- integrasi komposit menggunakan quadrature Simpson

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{2h}{3}\left[\tfrac{1}{2}\left(f_0 + f_{2N}\right) + 2\left(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}\right) + f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2N}, \quad f_i = f(a+ih), \quad i = 0,\ldots,2N$$

Integrasi komposit trapezoid untuk daerah integrasi [a,b] yang dibagi 8 sama panjang:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong h\left[\tfrac{1}{2}\left(f_0 + f_8\right) + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7\right]$$



Integrasi komposit yang menggunakan quadrature trapezoid dan Simpson; daerah integrasi [a,b] yang dibagi 3:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h1}{2}\left(f_a + 2f_{a+h1} + f_c\right) + \frac{h2}{3}\left(f_c + 4f_{c+h2} + f_b\right)$$