# Metode Numerik

**Imam Fachruddin**

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

# Metode Numerik

**Imam Fachruddin**

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

# Isi


- akar fungsi 1
- solusi sistem persamaan linear 25
- fitting dengan least square 49
- interpolasi 59
- integrasi 81
- persamaan differensial 109

## Interpolasi Hermite Kubik tanpa Data f'(x)

Interpolasi Hermite memerlukan sebagai data selain f(x) juga f'(x). Pada beberapa kasus bisa saja data f'(x) tidak tersedia, melainkan hanya data f(x). Pada kasus ini sebenarnya interpolasi Hermite tidak bisa dipakai. Tetapi, jika f'(x) bisa diperoleh melalui pendekatan (approximation) maka, interpolasi Hermite bisa dipakai.

$f'(x_i)$ dapat dihitung sebagai turunan sebuah fungsi kuadratik g(x), yang dicocokkan dengan data f(x) pada titik-titik $x_{i-1}$, $x_i$, $x_{i+1}$ :

$$g(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow \left.\begin{array}{c} g(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \\ g(x_i) = f(x_i) \\ g(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{array}\right\} (a, b, c) \longrightarrow \boxed{f'(x_i) \cong g'(x_i) = 2ax_i + b}$$

> Dapat dilihat bahwa, proses pencarian f'(x) ini berdiri sendiri, berada di luar atau bukan bagian dari proses interpolasi Hermite. Dengan begitu, sifat kontinyu fungsi interpolasi Hermite p(x) dan turunannya p'(x) tidak berubah.

Dari sistem persamaan linear:

$$\begin{aligned} ax_{i-1}^2 + bx_{i-1} + c &= f(x_{i-1}) \\ ax_i^2 + bx_i + c &= f(x_i) \\ ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c &= f(x_{i+1}) \end{aligned}$$

diperoleh:

$$a = \frac{f(x_{i-1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + \frac{f(x_i)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

$$b = -\frac{(x_i+x_{i+1})f(x_{i-1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} - \frac{(x_{i-1}+x_{i+1})f(x_i)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} - \frac{(x_{i-1}+x_i)f(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

sehingga:

$$\boxed{f'(x_i) \cong \left(\frac{x_i-x_{i+1}}{x_{i-1}-x_{i+1}}\right)\frac{f(x_{i-1})}{(x_{i-1}-x_i)} + \left(\frac{1}{x_i-x_{i+1}} + \frac{1}{x_i-x_{i-1}}\right)f(x_i) + \left(\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}\right)\frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)}}$$

Jika diaplikasikan pada interpolasi Hermite kubik:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{2} \left( h_1(x, x_j) f(x_j) + h_2(x, x_j) f'(x_j) \right)$$

maka diperoleh fungsi interpolasi Hermite kubik p(x) sebagai berikut:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} h(x, x_j) f(x_j) \qquad (x_i \le x \le x_{i+1};\ \ x_0 = x_{i-1},\ \ x_1 = x_i,\ \ x_2 = x_{i+1},\ \ x_3 = x_{i+2})$$

$$h(x, x_0) = h_2(x, x_1)\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}\right)\frac{1}{(x_0 - x_1)}$$

$$h(x, x_1) = h_1(x, x_1) + h_2(x, x_1)\left(\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_0}\right) + h_2(x, x_2)\left(\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}\right)\frac{1}{(x_1 - x_2)}$$

$$h(x, x_2) = h_1(x, x_2) + h_2(x, x_2)\left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_2 - x_3}\right) + h_2(x, x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right)\frac{1}{(x_2 - x_1)}$$

$$h(x, x_3) = h_2(x, x_2)\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right)\frac{1}{(x_3 - x_2)}$$

# Interpolasi Spline Kubik

Seperti interpolasi Lagrange, interpolasi Spline kubik juga memerlukan hanya f(x) sebagai data. Namun, turunan fungsi interpolasi Spline kubik p'(x) dibuat bersifat kontinyu.

Interpolasi Spline kubik menggunakan polinomial p(x) orde 3, untuk $x_i \le x \le x_{i+1}$:

$$p(x) = d_i + c_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + a_i(x - x_i)^3 \cong f(x)$$

Turunan pertama dan kedua p(x) yaitu:

$$p'(x) = c_i + 2b_i(x - x_i) + 3a_i(x - x_i)^2$$
$$p''(x) = 2b_i + 6a_i(x - x_i)$$

Evaluasi pada titik $x = x_i$ menghasilkan:

$$p_i \equiv p(x_i) = d_i = f(x_i) \qquad p''_i \equiv p''(x_i) = 2b_i$$

dan pada titik $x = x_{i+1}$:

$$p''_{i+1} \equiv p''(x_{i+1}) = 2b_i + 6a_ih_i \quad p_{i+1} \equiv p(x_{i+1}) = d_i + c_ih_i + b_ih_i^2 + a_ih_i^3 = f(x_{i+1}) \quad h_i \equiv x_{i+1} - x_i$$

Jadi,

$$d_i = p_i \qquad b_i = \frac{p''_i}{2} \qquad a_i = \frac{p''_{i+1} - p''_i}{6h_i} \qquad c_i = \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} - \frac{h_i p''_{i+1} + 2h_i p''_i}{6}$$

sehingga diperoleh:

$$\boxed{p(x) = p_i + \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} - \frac{h_i p''_{i+1}}{6} - \frac{h_i p''_i}{3} \right)(x - x_i) + \frac{p''_i}{2}(x - x_i)^2 + \left( \frac{p''_{i+1} - p''_i}{6h_i} \right)(x - x_i)^3}$$

$$p'(x) = \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} - \frac{h_i p''_{i+1}}{6} - \frac{h_i p''_i}{3} + p''_i (x - x_i) + \left( \frac{p''_{i+1} - p''_i}{2h_i} \right)(x - x_i)^2$$

p(x) telah dicocokkan dengan data f(x) di titik-titik batas interval, sehingga bersifat kontinyu. Untuk membuat p'(x) kontinyu maka dicari ekspresi p'(x) untuk daerah sebelumnya $x_{i-1} \le x \le x_i$ :

$$p'(x) = \frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1} p''_i}{6} - \frac{h_{i-1} p''_{i-1}}{3} + p''_{i-1} (x - x_{i-1}) + \left( \frac{p''_i - p''_{i-1}}{2h_{i-1}} \right)(x - x_{i-1})^2$$

dan disamakan dengan p'(x) untuk daerah $x_i \le x \le x_{i+1}$ di titik $x = x_i$ .

Untuk N = jumlah data, diperoleh:

$$h_{i-1}p''_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)p''_i+h_ip''_{i+1}=6\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{h_i}-\frac{p_i-p_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\qquad (i=2,\ldots,N-1)$$

Untuk menghitung p(x) diperlukan p''(x) di semua N titik data. (N-2) buah persamaan di atas tidak cukup untuk mendapatkan p''(x) di semua titik data. Masih diperlukan 2 persamaan lagi, yang diperoleh dengan mengevaluasi p'(x) di titik awal $x=x_1$ (memakai ekspresi p'(x) untuk $x_1\le x\le x_2$ ) dan akhir $x=x_N$ (memakai ekspresi p'(x) untuk $x_{N-1}\le x\le x_N$ ). Didapat:

$$(i=1)\qquad 2h_1p''_1+h_1p''_2=6\left(\frac{p_2-p_1}{h_1}-p'_1\right)$$

$$(i=N)\qquad h_{N-1}p''_{N-1}+2h_{N-1}p''_N=6\left(p'_N-\frac{p_N-p_{N-1}}{h_{N-1}}\right)$$

Masalah: p'(x) di titik awal $x=x_1$ dan akhir $x=x_N$ tidak diketahui, $\longrightarrow$ ??

Ada dua cara. Pertama yang disebut spline alamiah yaitu, menetapkan p''(x) di titik awal $x=x_1$ dan akhir $x=x_N$ sama dengan nol. Kedua, menebak nilai p'(x) di titik awal $x=x_1$ dan akhir $x=x_N$ .

# Interpolasi Multidimensi

Jika data bergantung pada lebih dari satu variabel, maka dilakukan interpolasi multidimensi. Metode interpolasi yang telah disampaikan bisa dipakai untuk melakukan interpolasi multidimensi. Sebagai contoh di sini ditunjukkan interpolasi 2 dimensi. Untuk dimensi lebih tinggi berlaku cara yang sama.

$$\boxed{p(x,y) = \sum_{i=1}^{n} S(x,x_i) \sum_{j=1}^{m} S(y,y_j) f(x_i,y_j)}$$

Pada contoh di atas, interpolasi menggunakan (n x m) data f(x,y). Interpolasi dilakukan per dimensi: Untuk satu titik data x tertentu dilakukan interpolasi di sepanjang sumbu y, hal yang sama dilakukan untuk semua titik data x yang lain. Prinsip yang sama berlaku untuk interpolasi berdimensi lebih tinggi.

Contoh, interpolasi Lagrange kubik:

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{3} l(x,x_i) \sum_{j=0}^{3} l(y,y_j) f(x_i,y_j)$$

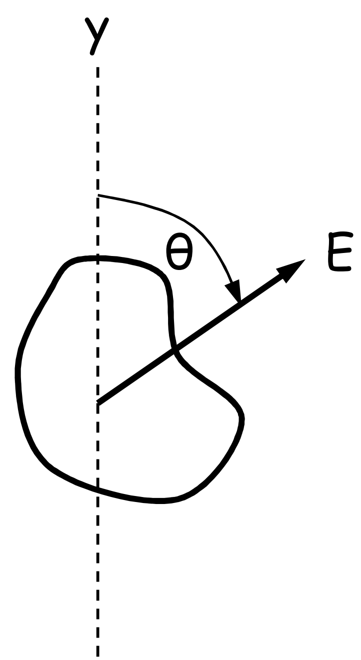
$$l(x,x_i) = \prod_{k \neq i} \left( \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

$$l(y,y_j) = \prod_{s \neq j} \left( \frac{y - y_s}{y_j - y_s} \right)$$

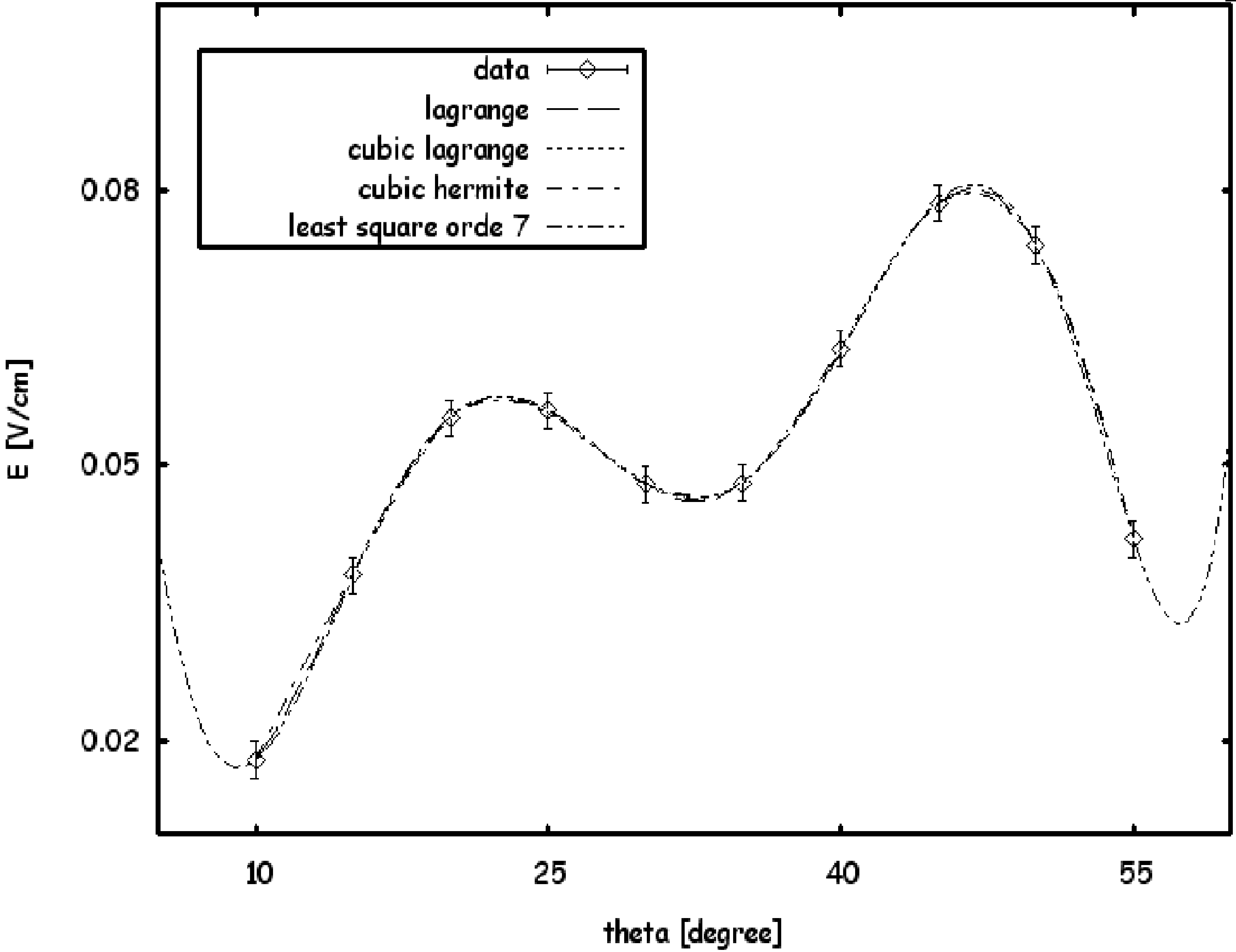
Kembali ke contoh problem least square:

Kuat medan listrik E di sekitar sebuah benda berbentuk lempeng diukur pada jarak 10 cm dari pusat massanya dan arah yang bervariasi. Arah dinyatakan dalam sudut θ terhadap sumbu y yang ditetapkan sebelum pengukuran. Diperoleh data sebagai berikut:

| θ [derajat] | E [V/cm] |
|---|---|
| 10 | 0.01794775 |
| 15 | 0.03808997 |
| 20 | 0.05516225 |
| 25 | 0.05598281 |
| 30 | 0.04795629 |
| 35 | 0.04807485 |
| 40 | 0.06273566 |
| 45 | 0.07853982 |
| 50 | 0.07395442 |
| 55 | 0.04201338 |




Dengan interpolasi, cari nilai p(x) di sepanjang titik data.


data
lagrange
cubic lagrange
cubic hermite
least square orde 7
E [V/cm]
0.08
0.05
0.02
10
25
40
55
theta [degree]