Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

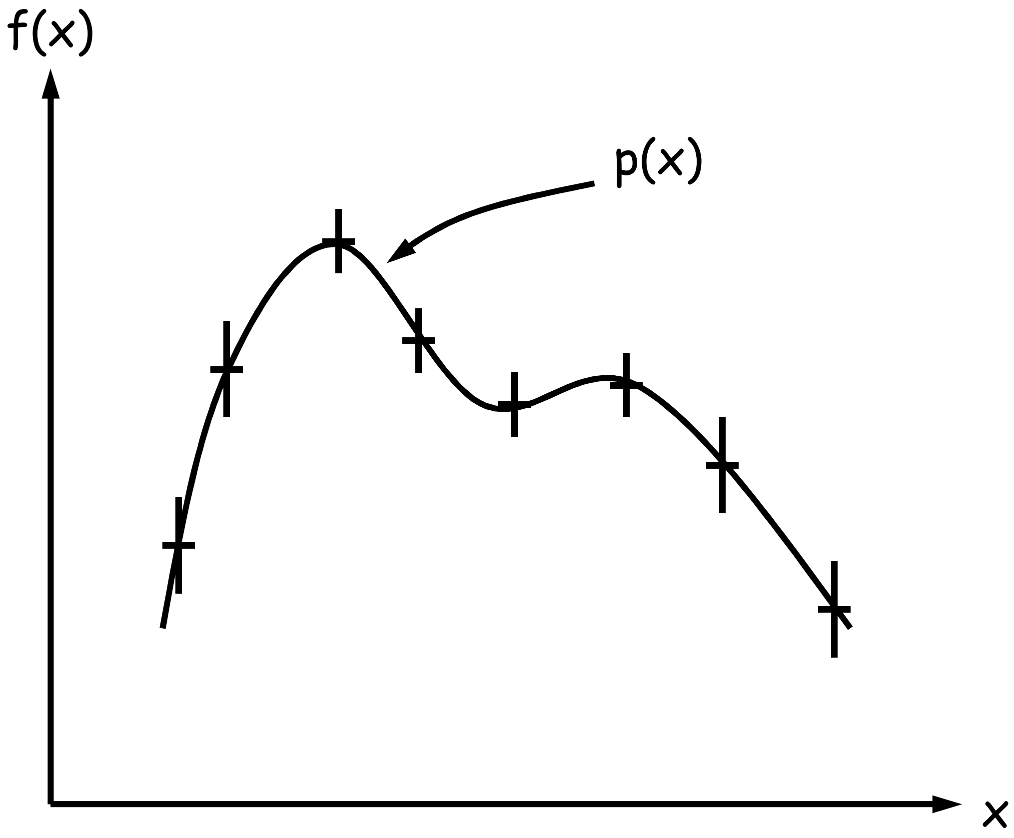
Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2^{nd} Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Interpolasi



Keterangan:

- $f(x_i)$ mewakili data;
  $i = 1, \ldots, N$;
  N = jumlah data
- $p(x)$ merupakan fungsi interpolasi berdasarkan data $f(x_i)$

Sifat interpolasi:
$p(x_i) = f(x_i)$
untuk semua x_i .

Interpolasi Lagrange

Digunakan p(x), suatu polinomial berorde m = N – 1, dengan N = jumlah data:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{N-1} x^{N-1} \cong f(x)$$

Nilai a_i (i = 0, …, N-1) ditetukan dengan menetapkan bahwa untuk semua titik data:

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

Jadi, diperoleh persamaan linear:

$$\begin{aligned}
p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{N-1} x_1^{N-1} = f(x_1) \\
p(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{N-1} x_2^{N-1} = f(x_2) \\
p(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + \ldots + a_{N-1} x_3^{N-1} = f(x_3) \\
&\ldots \\
p(x_N) &= a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \ldots + a_{N-1} x_N^{N-1} = f(x_N)
\end{aligned}$$

dan a_i (i = 0, …, N-1) diperoleh sebagai solusi dari persamaan linear itu.

N = 2:

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = f(x_1)$$
$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 = f(x_2)$$

$$a_0 = -\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2)$$

N = 3:

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1)$$
$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2)$$
$$p(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = f(x_3)$$

$$a_0 = \frac{(x_2 - x_3) x_2 x_3 f(x_1) + (x_3 - x_1) x_3 x_1 f(x_2) + (x_1 - x_2) x_1 x_2 f(x_3)}{(x_2 - x_3) x_1^2 + (x_3 - x_1) x_2^2 + (x_1 - x_2) x_3^2}$$

$$a_1 = -\frac{(x_2^2 - x_3^2) f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2) f(x_2) + (x_1^2 - x_2^2) f(x_3)}{(x_2 - x_3) x_1^2 + (x_3 - x_1) x_2^2 + (x_1 - x_2) x_3^2}$$

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_3) f(x_1) + (x_3 - x_1) f(x_2) + (x_1 - x_2) f(x_3)}{(x_2 - x_3) x_1^2 + (x_3 - x_1) x_2^2 + (x_1 - x_2) x_3^2}$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}\right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right) f(x_2) + \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) f(x_3)$$

Secara umum, untuk N data rumus interpolasi Lagrange:

$$\boxed{\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{N} l(x,x_i) f(x_i) \\ l(x,x_i) &= \prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) \end{aligned}}$$

Untuk $x = x_k$ (k = 1, …, N):

$$l(x_k,x_i) = \prod_{j\neq i}\left(\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}\right) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j\neq i}\left(\frac{x_i-x_j}{x_i-x_j}\right) & =1, \quad (i=k) \\ \displaystyle\cdots\left(\frac{x_k-x_k}{x_i-x_j}\right)\cdots & =0, \quad (i\neq k) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad l(x_k,x_i) = \delta_{ik} \qquad p(x_k) = f(x_k)$$

Perlukah memakai semua N data yang ada?

Pada bagian sebelum ini interpolasi menggunakan seluruh N data $f(x_i)$ yang tersedia, yang berarti menggunakan polinomial p(x) berorde N-1.

Kini, misal N = 4 dan x berada di sekitar x_4, maka diperoleh:

$$l(x,x_1)=\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right)\left(\frac{x-x_4}{x_1-x_4}\right) \qquad l(x,x_2)=\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right)\left(\frac{x-x_4}{x_2-x_4}\right)$$

$$l(x,x_3)=\left(\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\right)\left(\frac{x-x_4}{x_3-x_4}\right) \qquad l(x,x_4)=\left(\frac{x-x_1}{x_4-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_4-x_2}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)$$

Dapat dilihat bahwa, $l(x,x_1)<l(x,x_2)<l(x,x_3)<l(x,x_4)$.

Ini berarti, semakin jauh dari x pengaruh data $f(x_i)$ semakin kecil dalam menentukan nilai p(x). Data yang penting yaitu yang berada di sekitar titik x. Karena itu, cukup data-data di sekitar titik x yang digunakan.

Dengan kata lain, untuk interpolasi cukup digunakan polinomial p(x) berorde rendah, contoh berorde 3 (fungsi kubik).

Interpolasi Lagrange Kubik

Interpolasi Lagrange Kubik menggunakan polinomial p(x) berorde 3 sebagai fungsi interpolasi:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cong f(x)$$

Untuk mencari nilai a_j (j = 0, 1, 2, 3) diperlukan 4 data f(x_i) di sekitar x:

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3) \qquad \left(x_i \le x \le x_{i+1};\ x_0 = x_{i-1}, x_1 = x_i, x_2 = x_{i+1}, x_3 = x_{i+2}\right)$$

untuk membentuk sistem persamaan linear:

$$a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + a_3 x_j^3 = f(x_j) \qquad (j = 0,1,2,3)$$

Langkah pertama dengan begitu, menentukan x_j (j = 0, 1, 2, 3) dengan melihat posisi x di antara titik data x_i (i = 1, ..., N).

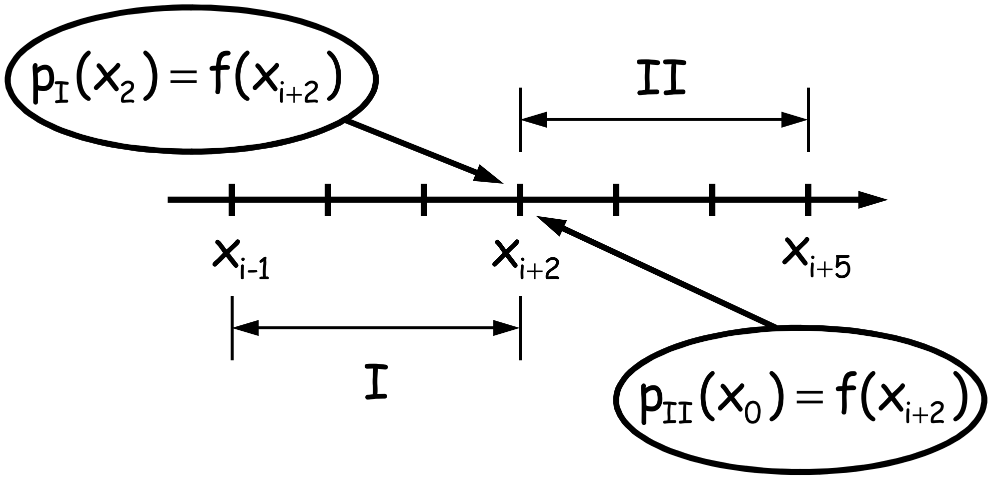
Diperoleh

$$\boxed{p(x) = \sum_{j=0}^{3} l(x, x_j) f(x_j) \qquad l(x, x_j) = \prod_{k \ne j} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)}$$

Catatan:

Karena fungsi interpolasi p(x) dicocokkan dengan data $f(x_0 = x_{i-1}), \ldots, f(x_3 = x_{i+2})$ maka p(x) berlaku hanya untuk daerah $x_{i-1} \le x \le x_{i+2}$. Untuk daerah x yang lain berlaku fungsi interpolasi p(x) yang lain.

Pada batas antara dua daerah yang bersebelahan, masing-masing fungsi interpolasi p(x) dari kedua daerah berbeda itu menunjukan nilai yang sama, karena dalam menentukan p(x) selalu dibuat agar p(x) cocok dengan setiap titik data dalam daerah itu.



Dengan kata lain, p(x) bersifat kontinyu. Tetapi, tidak begitu dengan turunannya: p'(x) bersifat diskontinyu pada batas dua daerah yang bersebelahan.

Interpolasi Hermite Kubik

Dengan menggunakan polinomial p(x) berorde 3 (kubik), interpolasi dilakukan di antara dua titik data yang berurutan, yaitu dalam interval $x_i \le x \le x_{i+1}$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cong f(x)$$

Jadi, yang pertama dilakukan yaitu, menentukan posisi x di antara titik data x_i (i = 1, …, N).

Untuk mencari a_j (j = 0, 1, 2, 3) diperlukan 4 persamaan, yang ditetapkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = f(x_1) \\ p(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = f(x_2) \\ p'(x_1) &= a_1 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2 = f'(x_1) \\ p'(x_2) &= a_1 + 2a_2 x_2 + 3a_3 x_2^2 = f'(x_2) \end{aligned} \qquad (x_i \le x \le x_{i+1};\; x_1 = x_i,\; x_2 = x_{i+1})$$

Jadi, pada interpolasi Hermite diperlukan sebagai data bukan saja f(x) namun juga turunannya f'(x).

Diperoleh a_j (j = 0, 1, 2, 3) sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \left(\frac{x_1^2(3x_2 - x_1)f(x_2) + x_2^2(x_2 - 3x_1)f(x_1)}{(x_2 - x_1)^3}\right) \\
&\quad - x_2 x_1 \left(\frac{x_1 f'(x_2) + x_2 f'(x_1)}{(x_2 - x_1)^2}\right) \\
a_1 &= -6x_2 x_1 \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{x_1(2x_2 + x_1)f'(x_2) + x_2(x_2 + 2x_1)f'(x_1)}{(x_2 - x_1)^2}\right) \\
a_2 &= 3(x_2 + x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^3}\right) \\
&\quad - \left(\frac{(x_2 + 2x_1)f'(x_2) + (2x_2 + x_1)f'(x_1)}{(x_2 - x_1)^2}\right) \\
a_3 &= -2\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^3}\right) + \left(\frac{f'(x_2) + f'(x_1)}{(x_2 - x_1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Dengan a_j (j = 0, 1, 2, 3) yang sudah diperoleh, didapat fungsi interpolasi p(x) sebagai berikut:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{2} \left(h_1(x, x_j) f(x_j) + h_2(x, x_j) f'(x_j) \right)$$

$$h_1(x, x_1) = \left(1 - 2\frac{(x - x_1)}{(x_1 - x_2)}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)^2$$

$$h_1(x, x_2) = \left(1 - 2\frac{(x - x_2)}{(x_2 - x_1)}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2$$

$$h_2(x, x_1) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)^2$$

$$h_2(x, x_2) = (x - x_2)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2$$

Pada interpolasi Hermite bukan saja p(x) yang dicocokkan dengan data f(x) namun juga turunannya p'(x) dicocokkan dengan data f'(x). Karena itu, baik p(x) maupun p'(x) bersifat kontinyu. Ini berbeda dari yang ditemui pada interpolasi Lagrange.

Interpolasi Hermite Orde Lebih Tinggi

Interpolasi Hermite tidak terbatas hanya menggunakan polinomial p(x) berorde 3 (kubik), namun dapat juga yang berorde lebih tinggi. Untuk itu diperlukan lebih banyak data, bukan hanya f(x) dan f'(x) pada titik x_i dan x_{i+1}.

Secara umum fungsi interpolasi Hermite p(x) berupa polinomial berorde (2n - 1) memerlukan n data f(x) dan n data f'(x):

$$\boxed{p(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(h_1(x, x_j) f(x_j) + h_2(x, x_j) f'(x_j) \right)}$$

dengan:

$$h_1(x, x_j) = \left(1 - 2(x - x_j) l'(x_j)\right) l^2(x, x_j)$$

$$h_2(x, x_j) = (x - x_j) l^2(x, x_j)$$

$$l(x, x_j) = \prod_{k \neq j} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

$$l'(x_j) = \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_j - x_k)}$$