Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

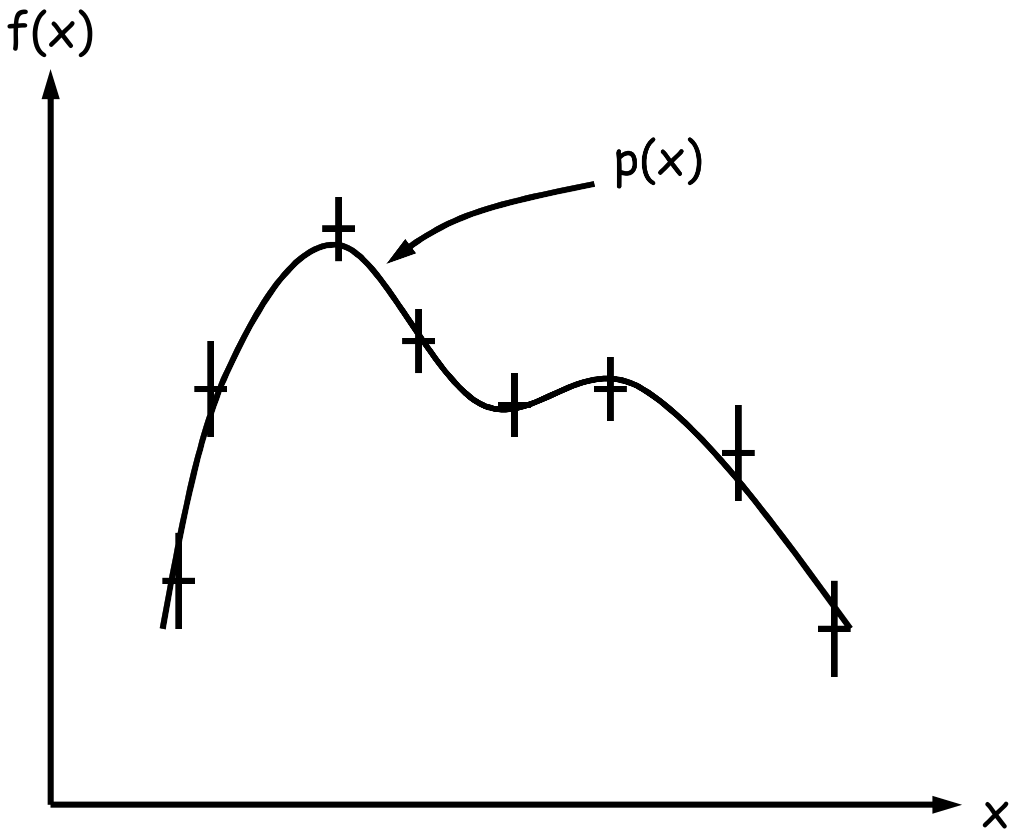
Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Data Fitting dengan Metode Least Square



Keterangan:

- $f(x_i)$ mewakili data;
  $i = 1, \ldots, N$;
  N = jumlah data
- p(x) merupakan fungsi yang dicocokkan (fitted) terhadap data $f(x_i)$

Sifat fitting:
tidak selalu $p(x_i) = f(x_i)$
untuk semua x_i .

Prinsip penentuan fungsi p(x):

- p(x) merupakan polinomial orde m:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_m x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

(Secara umum, p(x) juga bisa merupakan polinomial bentuk yang lain seperti, polinomial Legendre.)

- Selisih antara p(x) dan f(x) untuk titik data tertentu:

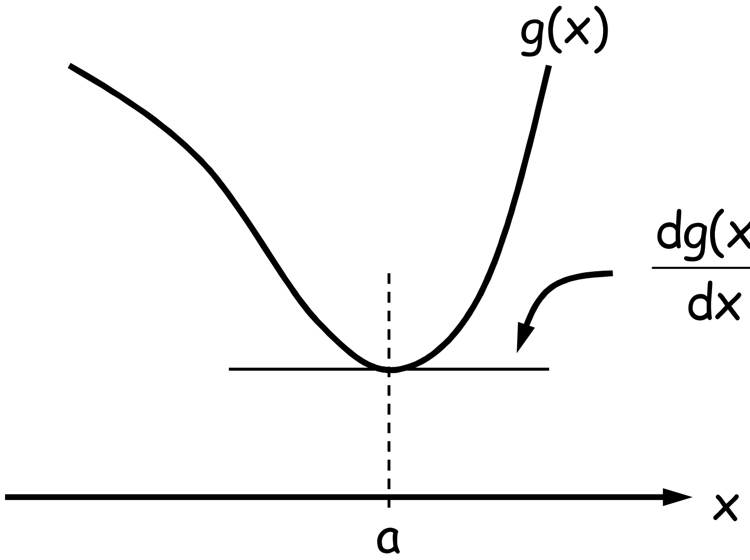
$$\Delta_i = f(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

- Jumlah kuadrat selisih antara p(x) dan f(x) untuk semua titik data:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - p(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right)^2$$

Fungsi p(x) ditentukan dengan mencari nilai a_j (j = 0, …, m) yang membuat S bernilai minimum.

Titik Minimum



$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

g(a) merupakan titik minimum jika:

$$\boxed{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \quad \text{dan} \quad \left.\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right|_{x=a} > 0}$$

Spesial: fungsi kuadratik $g(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg(x)}{dx} &= 2ax + b \\ \frac{d^2g(x)}{dx^2} &= 2a \end{aligned}\right\}$$

g(x) memiliki satu titik minimun jika a > 0 atau sebaliknya satu titik maksimum jika a < 0.

S merupakan fungsi kuadratik dalam a_j (j = 0, …, m):

$$S(a_0,\dots,a_m)=\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i)-\sum_{j=0}^{m}a_j x_i^j\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{m}\left(a_j^2 x_i^{2j}+\dots\right)+f^2(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial S(a_0,\dots,a_m)}{\partial a_k}=-2\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i)-\sum_{j=0}^{m}a_j x_i^j\right)x_i^k \qquad (k=0,\dots,m)$$

$$\frac{\partial^2 S(a_0,\dots,a_m)}{\partial a_k^{\;2}}=2\sum_{i=1}^{N}x_i^{2k}>0 \qquad (k=0,\dots,m)$$

S memiliki satu titik minimum pada nilai a_j (j = 0, …, m) tertentu.

Mencari a_j (j = 0, …, m):

$$\frac{\partial S(a_0,\dots,a_m)}{\partial a_k} = -2\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right)x_i^k = 0 \qquad (k = 0,\dots,m)$$

$$\longrightarrow \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{j+k}\right)a_j = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)x_i^k \qquad (k = 0,\dots,m)$$

Definisikan:

$$\boxed{c_{kj} \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i^{j+k} \qquad b_k \equiv \sum_{i=1}^{N} f(x_i)x_i^k}$$

maka diperoleh sebuah sistem persamaan linear: $\sum_{j=0}^{m} c_{kj}a_j = b_k \qquad (k = 0,\dots,m)$

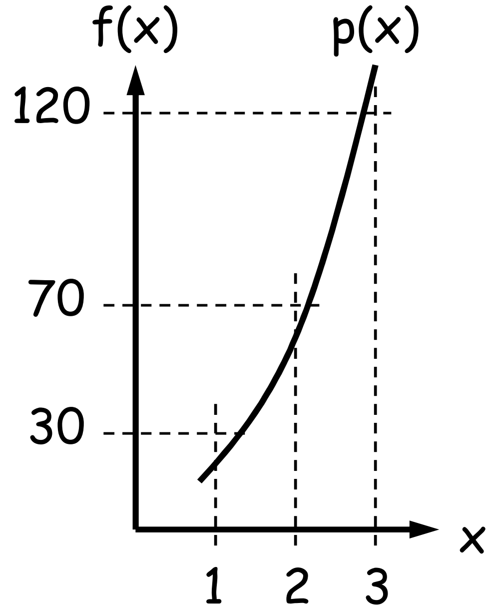
dalam bentuk matrik: $\begin{pmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ A \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ B \\ \\ \end{pmatrix}$ atau $CA = B$

Jadi, a_j (j = 0, …, m) diperoleh sebagai solusi persamaan linear $CA = B$.

Contoh: Terdapat tiga data f(x) yaitu, f(1) = 30, f(2) = 70 dan f(3) = 120.
Cari fungsi p(x) yang dapat melukiskan data itu.

Dari data itu jelas p(x) bukan fungsi linear.
Jadi, dicoba fungsi kuadratik:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



Sistem persamaan linier untuk mencari a_j:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 530 \\ 1390 \end{pmatrix}$$

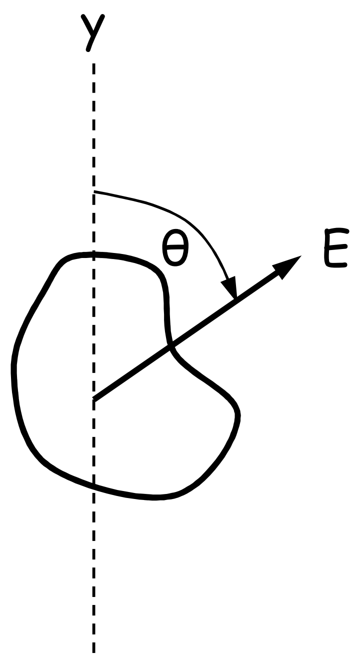
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 45 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, $\boxed{p(x) = 5x(x+5)} \longrightarrow$ Cek: p(1) = 30, p(2) = 70, p(3) = 120

OK!

Contoh: Kuat medan listrik E di sekitar sebuah benda berbentuk lempeng diukur pada jarak 10 cm dari pusat massanya dan arah yang bervariasi. Arah dinyatakan dalam sudut θ terhadap sumbu y yang ditetapkan sebelum pengukuran. Diperoleh data sebagai berikut:

θ [derajat]	E [V/cm]
10	0.01794775
15	0.03808997
20	0.05516225
25	0.05598281
30	0.04795629
35	0.04807485
40	0.06273566
45	0.07853982
50	0.07395442
55	0.04201338



Cari fungsi p(x) yang dapat melukiskan data itu.

Dicoba beberapa polinomial dengan orde berbeda, diperoleh:

m = 3:

$a_0 = 8.983713484853211E-03$
$a_1 = 1.324478388111303E-03$
$a_2 = 3.487808787880805E-05$
$a_3 = -8.085809790211842E-07$

$S = 1.0339E-03$

m = 5:

$a_0 = -3.557800654975570E-02$
$a_1 = 1.061996221844471E-03$
$a_2 = 8.802185976358352E-04$
$a_3 = -5.862332690401015E-05$
$a_4 = 1.362046192596346E-06$
$a_5 = -1.063951754163944E-08$

$S = 8.1573E-05$

m = 9:

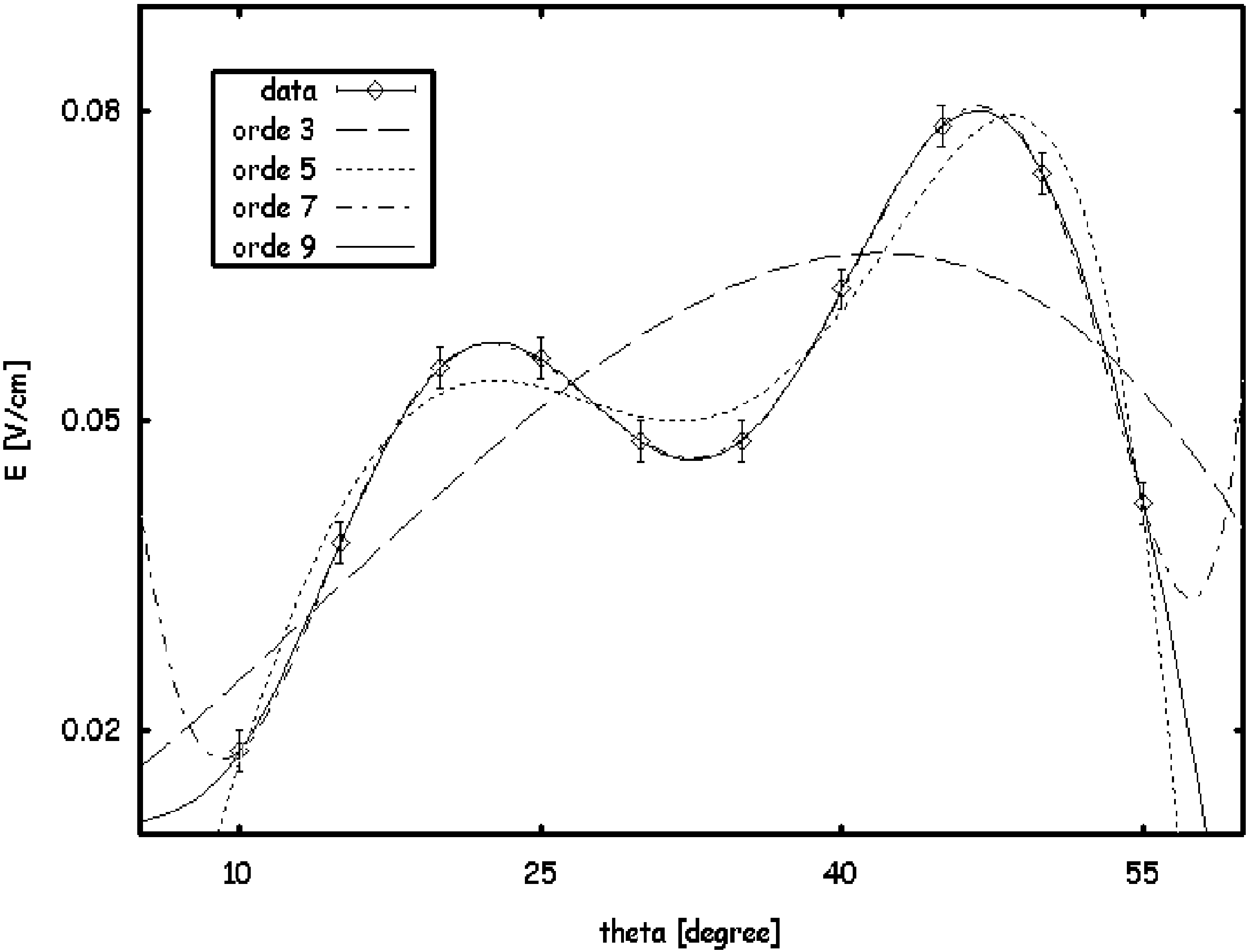
$a_0 = -1.757260839248139E-02$
$a_1 = 1.596300085173997E-02$
$a_2 = -3.402768734407800E-03$
$a_3 = 3.358961098305538E-04$
$a_4 = -1.368895999268855E-05$
$a_5 = 1.132254508386570E-07$
$a_6 = 8.262829873458547E-09$
$a_7 = -2.741786330789355E-10$
$a_8 = 3.317446724324134E-12$
$a_9 = -1.459511835946927E-14$

$S = 1.7528E-11$

m = 7:

$a_0 = 1.864754537649403E-01$
$a_1 = -4.631839872868015E-02$
$a_2 = 4.007658091692495E-03$
$a_3 = -8.985715636865594E-05$
$a_4 = -3.230489224228010E-06$
$a_5 = 1.912806006890119E-07$
$a_6 = -3.252863805243949E-09$
$a_7 = 1.876184315740421E-11$

$S = 3.1629E-07$


data
orde 3
orde 5
orde 7
orde 9
0.08
0.05
0.02
E [V/cm]
10
25
40
55
theta [degree]