Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Kasus Beberapa Sistem Persamaan Linear

Pada kasus yang lebih umum bisa saja terdapat beberapa sistem persamaan linear dengan nilai B yang berlainan, namun memiliki nilai A yang sama.

Dalam bentuk matriks sistem seperti ini dituliskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ X \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ B \\ \\ \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad AX = B$$

Keterangan:

- A matriks n x n, X dan B matriks n x m, dengan m = jumlah sistem persamaan linear, n = jumlah persamaan / unknown dalam tiap sistem persamaan tersebut
- Tiap kolom matriks X merupakan solusi untuk kolom yang sama pada matriks B.

Langkah dan rumus pada metode Eliminasi Gauss dan LU Decomposition berlaku sama untuk kasus ini. Hanya saja, di sini matriks X dan B terdiri dari beberapa kolom, bukan hanya satu.

Contoh dua sistem persamaan linear yang memiliki nilai A sama tapi B berbeda.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{pmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss:

- rumus triangulasi:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_{ir}^{(0)} = b_{ir} \qquad (i,j = 1,\ldots,n; r = 1,\ldots,m)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \qquad (k = 1,\ldots,n-1; i = k+1,\ldots,n;$$

$$b_{ir}^{(k)} = b_{ir}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_{kr}^{(k-1)} \qquad j = k,\ldots,n; r = 1,\ldots,m)$$

$a_{ij}^{(m)}, b_{ir}^{(m)} \equiv a_{ij}, b_{ir}$
pada langkah ke m

- rumus substitusi mundur:

$$x_{nr} = \frac{b_{nr}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \qquad (r = 1,\ldots,m)$$

$$x_{n-j,r} = \frac{b_{n-j,r}^{(n-j-1)} - \sum_{k=n-j+1}^{n} a_{n-j,k}^{(n-j-1)} x_{kr}}{a_{n-j,n-j}^{(n-j-1)}} \qquad (j = 1,\ldots,n-1; r = 1,\ldots,m)$$

Metode LU Decomposition:

- rumus substitusi maju untuk menghitung y (kini Y matriks n x m):

$$y_{1r} = \frac{b_{1r}}{l_{11}} \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

$$y_{ir} = \frac{b_{ir} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_{jr}}{l_{ii}} \qquad (i = 2, \ldots, n; r = 1, \ldots, m)$$

- rumus substitusi mundur untuk menghitung x:

$$x_{nr} = y_{nr} \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

$$x_{n-i,r} = y_{n-i,r} - \sum_{j=n-i+1}^{n} u_{n-i,j} x_{jr} \qquad (i = 1, \ldots, n-1; r = 1, \ldots, m)$$

Perhatikan metode LU Decomposition, anggap matriks L dan U telah diperoleh. Jika kemudian terdapat lagi sistem persamaan linear dengan A sama dan B berbeda, maka matriks L dan U yang telah diperoleh itu bisa langsung dipakai untuk sistem persamaan yang baru tersebut.

Kini perhatikan metode Eliminasi Gauss, anggap triangulasi matriks A sudah dikerjakan. Jika kemudian terdapat lagi sistem persamaan linear dengan A sama dan B berbeda, maka hasil triangulasi matriks A yang sudah diperoleh tidak dapat dipakai untuk sistem persamaan yang baru. Untuk sistem yang baru tersebut proses triangulasi matriks A harus dilakukan lagi dari awal.

Hal ini disebabkan, matriks B harus berubah mengikuti proses triangulasi matriks A, sementara proses penguraian matriks A menjadi matriks L dan U tidak melibatkan matriks B.

Catatan:

Dalam rumus-rumus baik pada metode Eliminasi Gauss maupun LU Decomposition terdapat pembagian oleh elemen diagonal matriks yaitu, oleh elemen diagonal matriks A pada metode Eliminasi Gauss, dan elemen diagonal matriks L pada metode LU Decomposition.

Jika secara kebetulan elemen diagonal itu nol, maka akan timbul error.

Karena itu, pada setiap langkah dalam proses triangulasi matriks A (metode Eliminasi Gauss) atau pencarian matriks L dan U (metode LU Decomposition) perlu dilakukan pemeriksaan, apakah elemen matriks A atau L yang bersangkutan sama dengan nol.

Jika bernilai nol, maka baris berisi elemen diagonal nol itu harus ditukar dengan salah satu baris setelahnya, sehingga elemen diagonal menjadi bukan nol. Perubahan baris pada matriks A (metode Eliminasi Gauss) harus disertai perubahan baris yang sama pada matriks B. Perubahan baris pada matriks L (metode LU Decomposition) harus disertai perubahan baris yang sama pada matriks A dan B.

Soal:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{0} & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

baris 2 ditukar dengan baris 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1.75 & 2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = 1$$

$$x_3 = \frac{3 + 0.5x_4}{3.5} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1 + 0.5x_3 + 2.5x_4}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{2 + 4x_2 - x_3 - 3x_4}{2} = 1$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&1&3\\-1&2&3&-2\\3&-4&1&2\\1&-3&-1&5\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} \rightarrow L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&l_{22}&0&0\\3&l_{32}&l_{33}&0\\1&l_{42}&l_{43}&l_{44}\end{pmatrix} \rightarrow U=\begin{pmatrix}1&-2&0.5&1.5\\0&1&u_{23}&u_{24}\\0&0&1&u_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&0&0&0\\3&2&l_{33}&0\\1&-1&l_{43}&l_{44}\end{pmatrix}$$

$$\leftarrow A=\begin{pmatrix}2&-4&1&3\\3&-4&1&2\\-1&2&3&-2\\1&-3&-1&5\end{pmatrix} L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\3&2&0&0\\-1&0&l_{33}&0\\1&-1&l_{43}&l_{44}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow U=\begin{pmatrix}1&-2&0.5&1.5\\0&1&-0.25&-1.25\\0&0&1&u_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix} \rightarrow L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\3&2&0&0\\-1&0&3.5&0\\1&-1&-1.75&l_{44}\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}1&-2&0.5&1.5\\0&1&-0.25&-1.25\\0&0&1&-1/7\\0&0&0&1\end{pmatrix} \rightarrow L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\3&2&0&0\\-1&0&3.5&0\\1&-1&-1.75&2\end{pmatrix}$$

baris 2 ⋆ baris 3

Iterasi Jacobi

sistem persamaan linear: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ solusi: $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij} x_j \right)$

Pencarian solusi dimulai dengan nilai awal $x_i^{(0)}$ (i = 1, …, n) hasil perkiraan / tebakan. Dengan nilai tebak awal ini diperoleh nilai perkiraan berikut $x_i^{(1)}$ melalui:

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} \right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Demikian seterusnya berulang-ulang, nilai perkiraan pada langkah ke k diperoleh dari nilai perkiraan pada langkah ke k-1:

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \quad (i = 1, \ldots, n)}$$

Pencarian dihentikan setelah didapat nilai x_i yang konvergen yaitu, yang tidak atau sedikit berubah dari nilai yang diperoleh pada langkah sebelumnya:

$$\left| 1 - \frac{x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon, \qquad \varepsilon = \text{bilangan kecil}$$

Iterasi Gauss-Siedel

Rumus iterasi Jacobi dapat ditulis: $x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)$

Jika pada tiap langkah pencarian dilakukan dengan urutan i yang makin besar, maka semua $x_{j<i}^{(k)}$ sudah diperoleh ketika mencari $x_i^{(k)}$.

Sebaliknya, jika dilakukan dengan urutan i yang makin kecil, maka semua $x_{j>i}^{(k)}$ sudah diperoleh ketika mencari $x_i^{(k)}$.

Karena itu, nilai $x_{j<i}^{(k)}$ atau $x_{j>i}^{(k)}$ itu bisa langsung dipakai untuk mencari $x_i^{(k)}$, sehingga iterasi mencapai nilai konvergen menjadi lebih cepat:

$$\boxed{\begin{aligned} x_i^{(k)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \\ x_i^{(k)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad (i=n,\ldots,2,1) \end{aligned}}$$

Iterasi seperti ini disebut iterasi Gauss-Siedel.

Kita lihat kembali metode Eliminasi Gauss dan LU Decomposition untuk mencari solusi sebuah sistem persamaan linear. Pada metode ini terdapat substitusi mundur dan maju. Pada substitusi mundur (maju), nilai x_i dihitung dari nilai $x_{j>i}$ ($x_{j<i}$), sehingga kesalahan (ketidakakuratan) pada $x_{j>i}$ ($x_{j<i}$) terakumulasi pada x_i. Dengan kata lain, terjadi perambatan kesalahan.

Pada metode iterasi tidak terdapat perambatan kesalahan seperti itu. Semua elemen x dilihat secara sama. Pada tiap langkah dilakukan pemeriksaan konvergensi untuk semua elemen x. Jadi, untuk tiap elemen x terdapat kesempatan yang sama untuk mencapai keakuratan yang diinginkan.

Namun, pada metode iterasi ada keharusan menentukan nilai awal, yang bisa saja sulit dilakukan atau menimbulkan masalah, misalnya membuat iterasi terlalu lama mencapai konvergensi.