Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

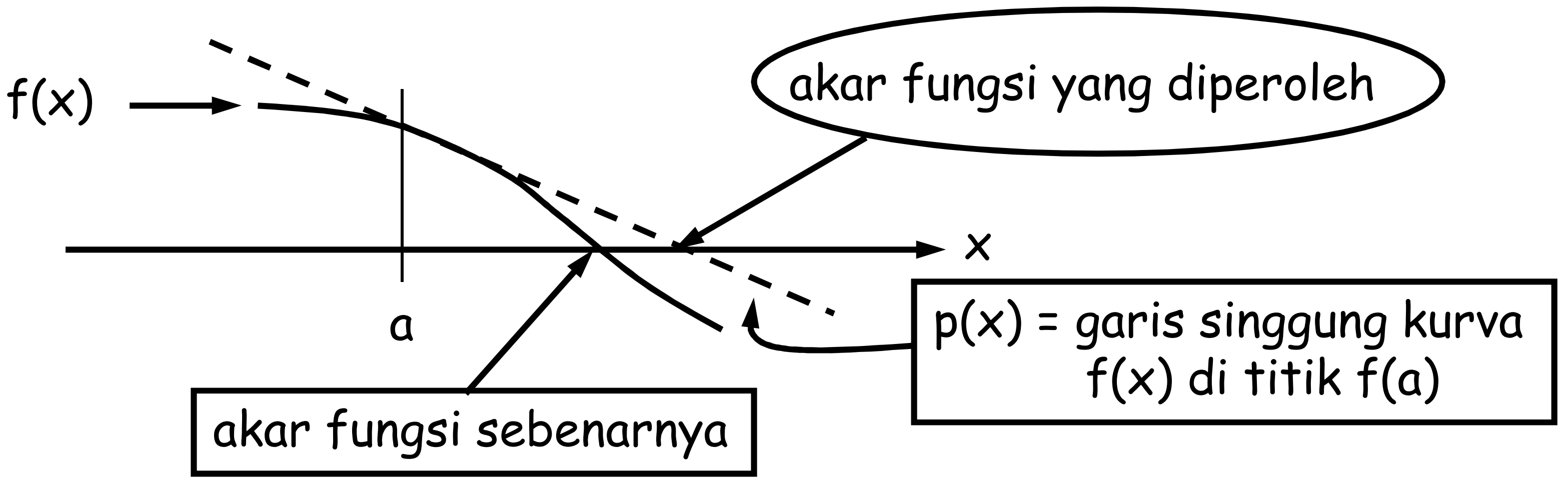
- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2^{nd} Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

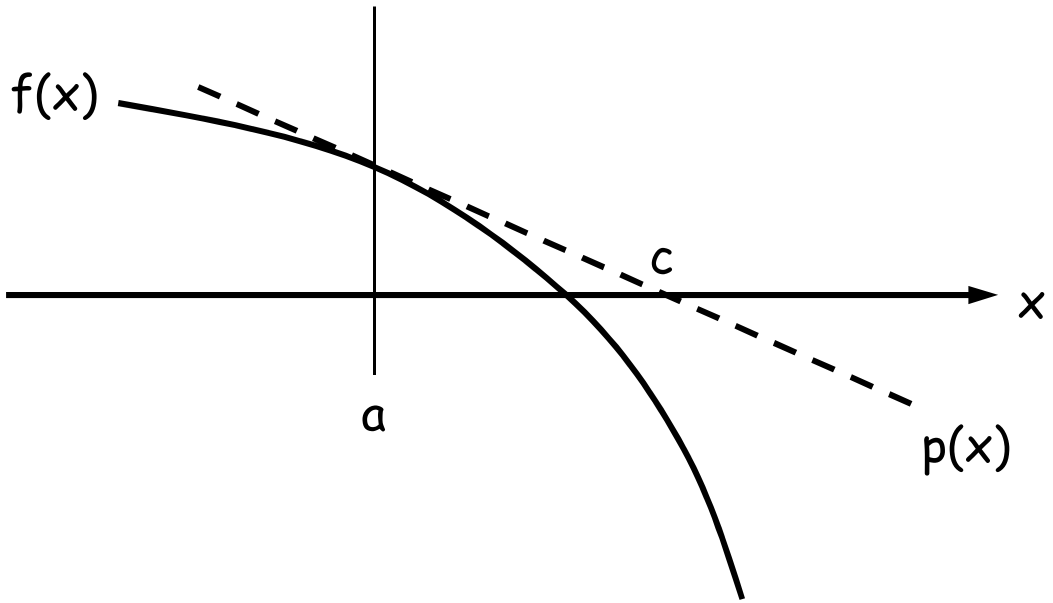
  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Newton-Raphson

Prinsip: Buat garis singgung kurva f(x) di titik di sekitar akar fungsi. Titik tempat garis singgung itu memotong garis nol ditentukan sebagai akar fungsi.





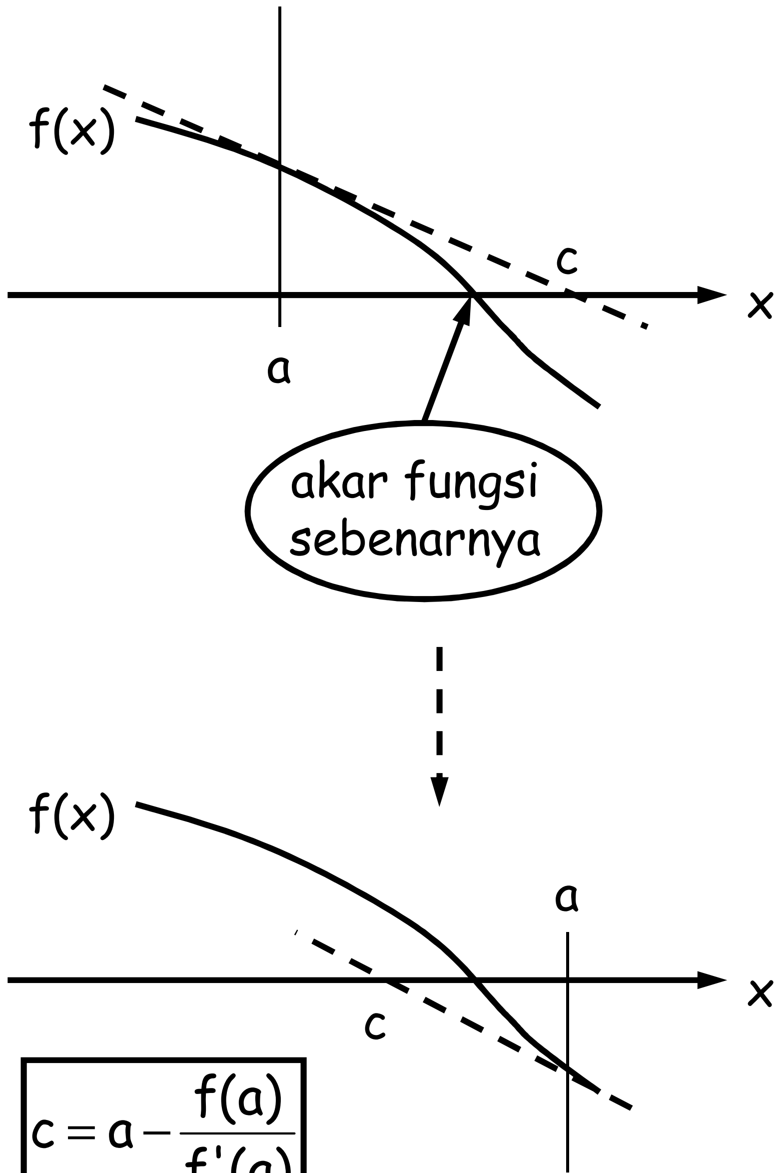
Diperoleh: $p(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$

(f'(a) turunan pertama f(x) pada x = a)

$$p(c) = 0 \longrightarrow \boxed{c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

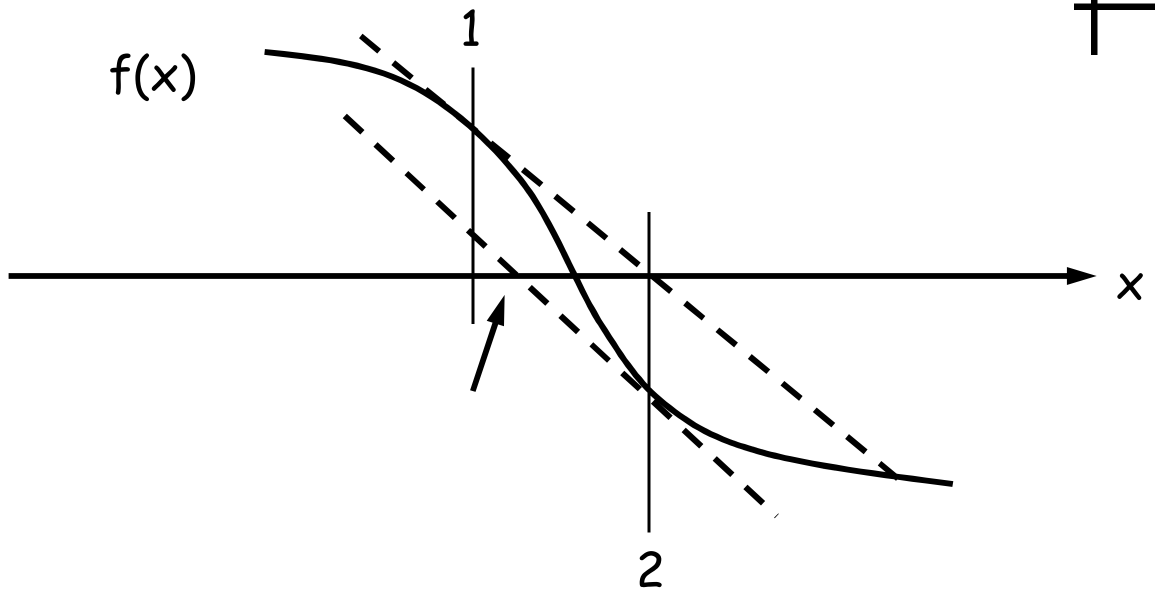
Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi.
2. Buat garis singgung pada titik sesuai akar fungsi yang diperkirakan itu, lalu cari titik potongnya dengan garis nol.
3. Titik potong itu merupakan perkiraan akar fungsi baru.
4. Ulangi langkah 2 dan 3 sampai dianggap cukup.
5. Titik potong garis nol dan garis singgung kurva yang terakhir dinyatakan sebagai akar fungsi.

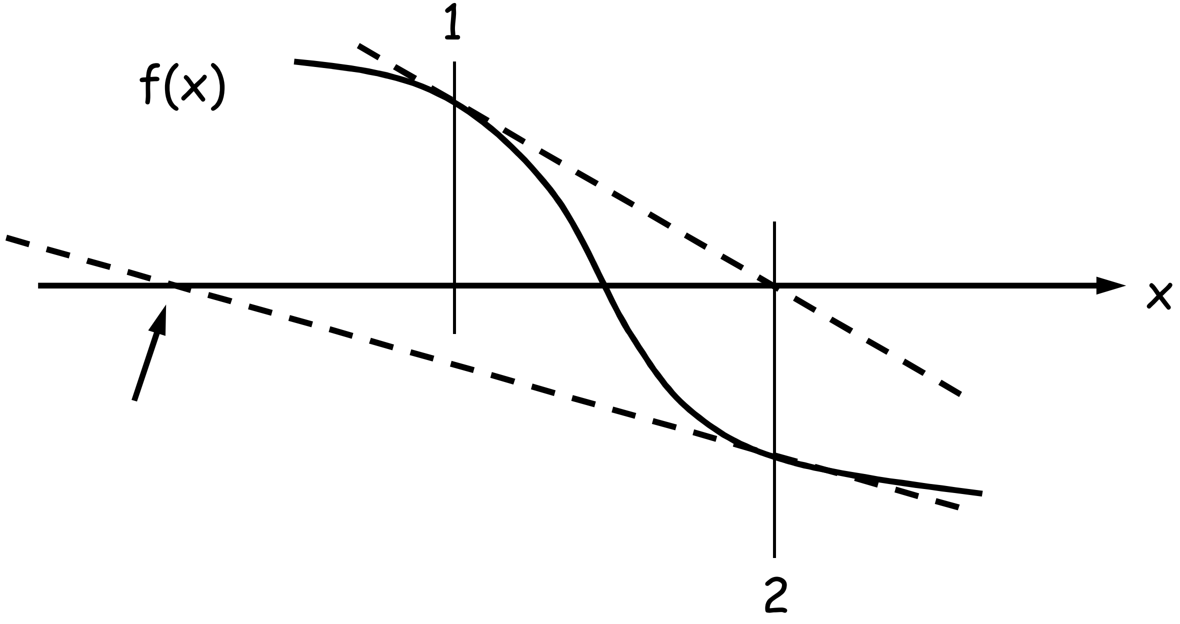


$$\boxed{c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

Contoh perkiraan akar fungsi awal yang baik
→ perkiraan akar fungsi makin mendekati akar fungsi sebenarnya.



Contoh perkiraan akar fungsi awal yang buruk
→ perkiraan akar fungsi makin menjauhi akar fungsi sebenarnya.



Menghitung akar fungsi dengan metode Newton-Raphson:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (i = 0,1,2,...;\ x_0 = a)}$$

kesalahan relatif semu:

$$\boxed{\Delta_{rel} = \left| \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1}} \right|}$$

Penghitungan dihentikan jika kesalahan relatif semu sudah mencapai / melampaui batas yang diinginkan.

Secant

Kembali ke metode False Position, untuk contoh batas b tetap, akar fungsi dicari sebagai berikut:

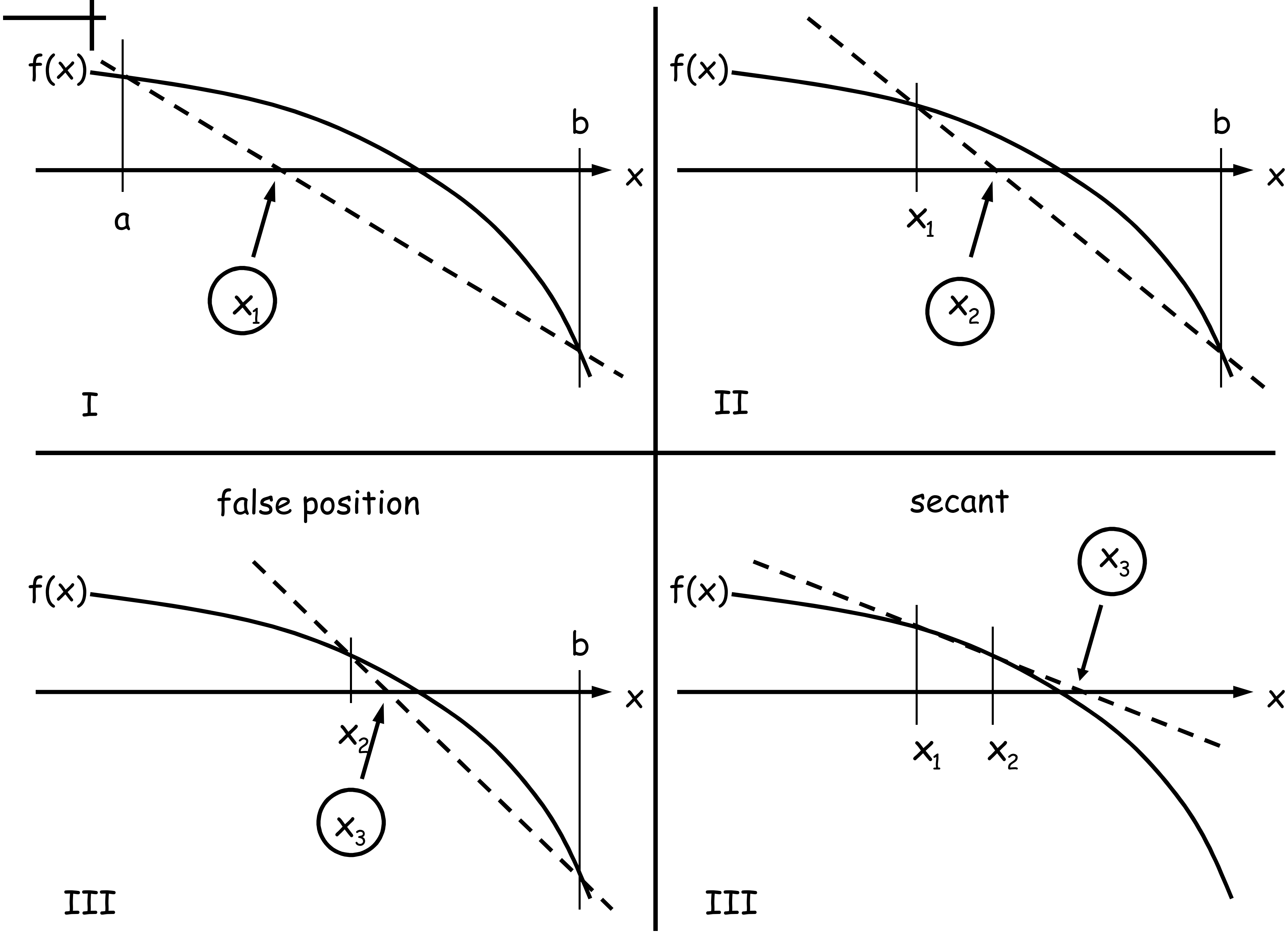
$$x_1 = \frac{bf(x_0) - x_0 f(b)}{f(x_0) - f(b)} \longrightarrow x_2 = \frac{bf(x_1) - x_1 f(b)}{f(x_1) - f(b)} \longrightarrow x_3 = \frac{bf(x_2) - x_2 f(b)}{f(x_2) - f(b)} \;\ldots\ldots$$

Pada metode Secant, batas tidak dijaga tetap, melainkan berubah. Akar fungsi dicari sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{bf(x_0) - x_0 f(b)}{f(x_0) - f(b)} \longrightarrow x_2 = \frac{bf(x_1) - x_1 f(b)}{f(x_1) - f(b)} \longrightarrow x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \;\ldots\ldots$$

Jadi, mulai dari i = 3, akar fungsi dihitung dengan:

$$\boxed{x_i = \frac{x_{i-2} f(x_{i-1}) - x_{i-1} f(x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}}$$



f(x)
a
b
x
x_1
I
f(x)
b
x
x_1
x_2
II
false position
secant
f(x)
b
x
x_2
x_3
III
f(x)
x_3
x
x_1
x_2
III

Akar fungsi pada metode Secant untuk i = 1, 2 bisa dihitung dengan metode yang lain atau ditebak. Mulai i = 3, akar fungsi dihitung dengan rumus:

$$x_i = \frac{x_{i-2}f(x_{i-1}) - x_{i-1}f(x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} \longrightarrow \boxed{x_i = x_{i-1} - \left(\frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}}\right)^{-1} f(x_{i-1})}$$

Yang menarik, jika i makin besar, maka beda antar dua akar fungsi yang berturutan semakin kecil, sehingga

$$\frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}} \cong \frac{df(x_{i-1})}{dx_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \longrightarrow x_i \cong x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Dengan begitu, metode Secant menyerupai metode Newton-Raphson. Jika turunan fungsi f(x) sulit diperoleh / dihitung, maka metode Secant menjadi alternatif yang baik bagi metode Newton-Raphson.

Kesalahan relatif semu dihitung sama seperti pada metode False Position atau Newton-Raphson.

Kecepatan Konvergensi

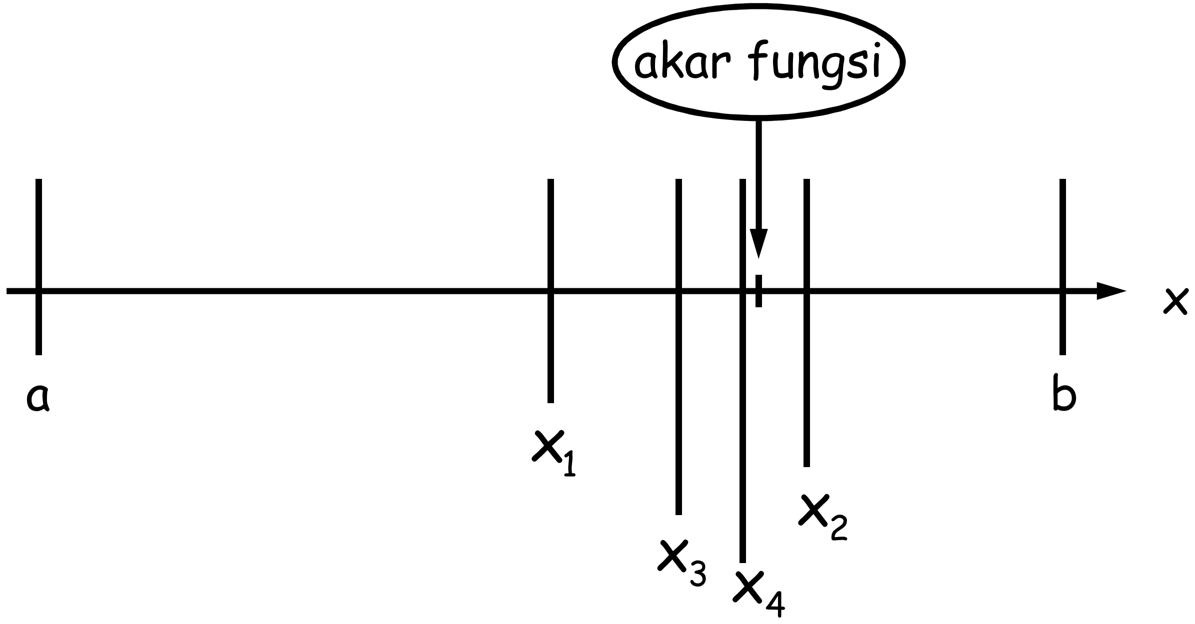
Pencarian akar fungsi dimulai dengan perkiraan akar fungsi yang pertama, lalu diikuti oleh perkiraan berikutnya dan seterusnya sampai perkiraan yang terakhir, yang kemudian dinyatakan sebagai akar fungsi hasil perhitungan tersebut. Proses itu harus bersifat konvergen yaitu, selisih perkiraan sebelum dari yang setelahnya makin lama makin kecil. Setelah dianggap cukup, proses pencarian akar fungsi berhenti.

$$\left|x_2 - x_1\right| > \left|x_3 - x_2\right| > \left|x_4 - x_3\right| \ldots \left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \varepsilon$$

(ε = bilangan kecil)

Kecepatan konvergensi sebuah proses yaitu, kecepatan proses itu untuk sampai pada hasil akhir.

Contoh pencarian akar fungsi dengan metode Bisection:



Jika $\varepsilon_i \equiv |x_{i+1} - x_i|$, maka dari gambar diperoleh:

$$\varepsilon_1 = |x_2 - x_1|,\ \varepsilon_2 = |x_3 - x_2|,\ \varepsilon_3 = |x_4 - x_3|$$

$$\varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ \varepsilon_3 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2$$

Kecepatan konvergensi bersifat linear: $\boxed{\varepsilon_{i+1} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_i}$

Pada metode False Position, Newton-Raphson dan Secant akar fungsi dicari dengan rumus yang bentuknya serupa:

False Position: $$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}\right)^{-1} f(x_i) \quad \text{(atau a diganti b)}$$

Newton-Raphson: $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Secant: $$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^{-1} f(x_i)$$

Mengingat dengan berjalannya proses pencarian akar fungsi rumus pada metode False Position dan terlebih lagi Secant semakin mendekati rumus pada metode Newton-Raphson, maka akan dibahas kecepatan konvergen pada metode Newton-Raphson.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow \varepsilon_i \equiv x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow \varepsilon_{i+1} = \frac{f(x_{i+1})}{f'(x_{i+1})} = ?$$

ekspansi deret Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i - \varepsilon_i) = f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 f''(x_i) - \ldots$$

$$f'(x_{i+1}) = f'(x_i - \varepsilon_i) = f'(x_i) - \varepsilon_i f''(x_i) + \ldots$$

$$\longrightarrow \quad \varepsilon_{i+1} = \frac{f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 f''(x_i) - \ldots}{f'(x_i) - \varepsilon_i f''(x_i) + \ldots}$$

$$\cong \frac{f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 f''(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\cong \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}\varepsilon_i^2$$

Kecepatan konvergensi pada metode Newton-Raphson (kira-kira demikian juga False Position dan Secant) bersifat kurang lebih kuadratik:

$$\boxed{\varepsilon_{i+1} \cong \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}\varepsilon_i^2}$$

Dengan begitu, metode metode Newton-Raphson, False Position dan Secant lebih cepat dari metode Bisection.

Contoh hasil pencarian akar fungsi untuk soal cos(x) = x:

metode	akar	f(akar)	jumlah langkah
Bisection	0.7390795	9.3692161E-06	12
False Position	0.7390851	-7.7470244E-09	3
Newton-Raphson	0.7390851	-7.7470244E-09	4
Secant	0.7390851	-7.7470244E-09	3

Keterangan:

- Pencarian akar berhenti jika kesalahan relatif semu sama atau kurang dari 1.0E-05.
- Batas awal kiri dan kanan untuk metode Bisection, False Position dan Secant 0.72 dan 0.75.
- Perkiraan akar fungsi pertama untuk metode Newton-Raphson 0.72.