Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Analisis Numerik

Dapat diunduh dari http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/

Metode Numerik

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, A First Course in Computational Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., Numerical Recipes in Fortran 77, 2^{nd} Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

  (online / free download: http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php)
- R. H. Landau & M. J. Páez, Computational Physics: Problem Solving with Computers (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997)
- S. E. Koonin, Computational Physics (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1986)

Isi

Akar Fungsi

$f(x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = ?}$

akar fungsi f(x)

Contoh: $x - \frac{1}{x} = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = 1$ dan -1

$3x^2 = 6 - 7x \longrightarrow 3x^2 + 7x - 6 = (3x - 2)(x + 3) = 0$

$\downarrow$

$x = 2/3$ dan -3

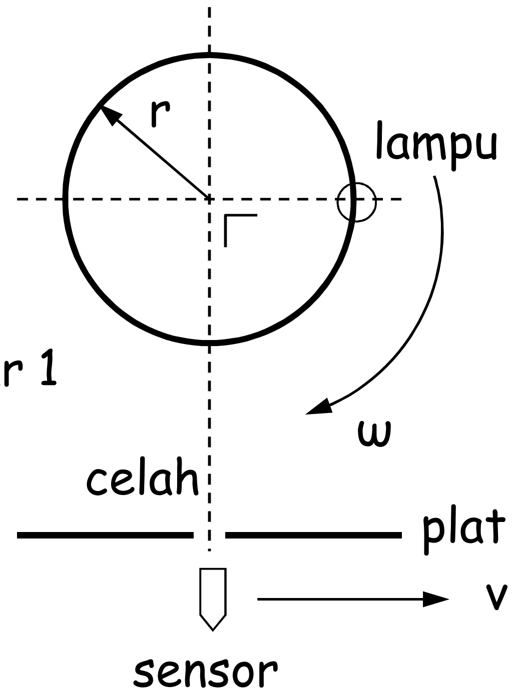
Pada dua contoh di atas akar fungsi dapat dicari secara analitik.

Secara umum, tidak selalu begitu keadaannya.

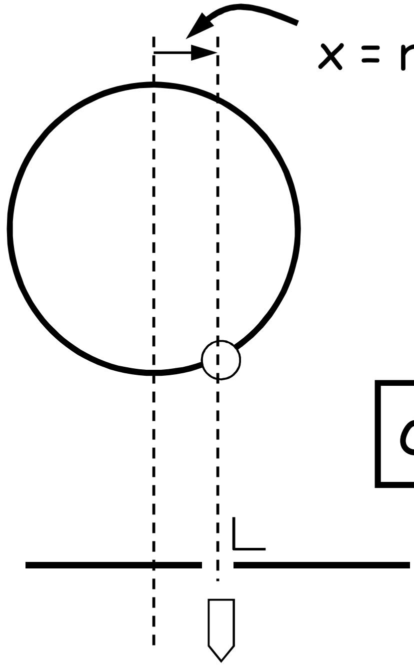
Problem:

Sebuah lampu dipasang di pinggir sebuah piringan berjari-jari 10 cm. Sebuah plat bercelah sempit diletakkan di dekat piringan itu. Tepat di belakang celah itu dipasang sebuah sensor cahaya yang menghadap tegak lurus ke celah. Piringan diputar konstan 1 rad/s dan plat beserta sensor digeser lurus konstan 10 cm/s. Saat ini posisi celah dan lampu seperti pada gambar 1. Kapan sensor cahaya menerima cahaya terbanyak?

Sensor menerima cahaya terbanyak pada saat posisi lampu dan celah membentuk garis tegak lurus terhadap plat, seperti pada gambar 2.



gambar 1



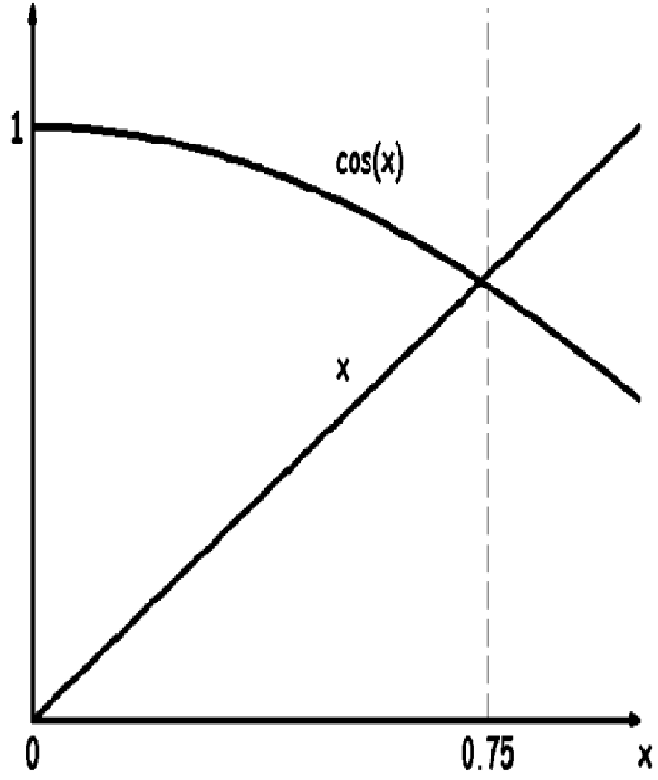
gambar 2

$x = r \cos(\omega t) = vt$

$$\boxed{\cos(t) = t}$$

?

Plot cos(x) dan x:



Grafik ini menunjukkan bahwa cos(x) = x pada x sedikit kurang dari 0.75.

Bisakah lebih akurat lagi?

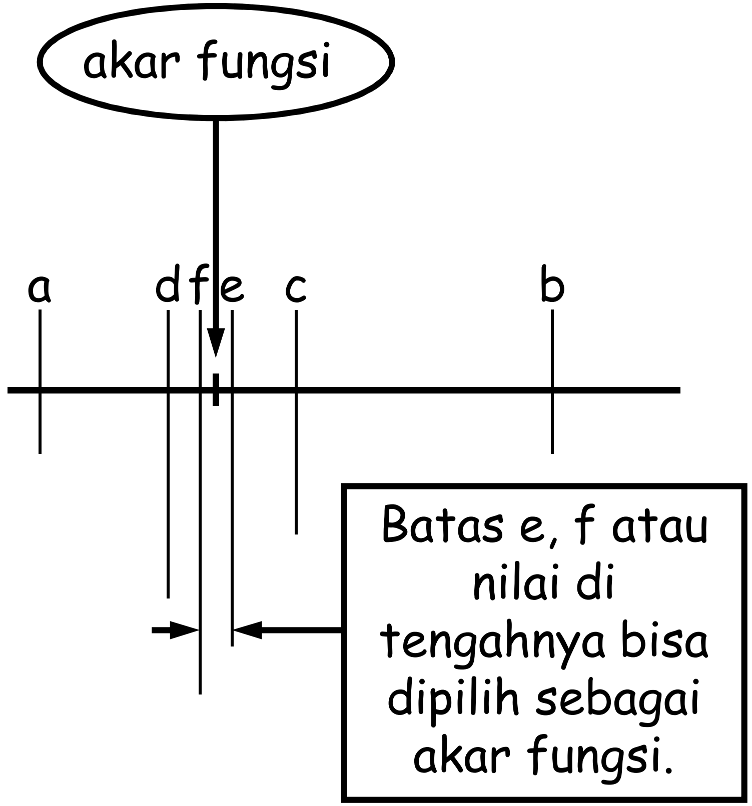
Cari secara numerik akar fungsi dari
$f(x) = \cos(x) - x$

Bisection

Prinsip: Kurung akar fungsi di antara dua batas, lalu paruh batas itu terus menerus sampai batas itu sedemikian sempit dan dengan demikian lokasi akar fungsi diketahui dengan keakuratan tertentu.

Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi (bisa dengan cara memplot fungsi).
2. Tentukan batas awal yang mengurung akar fungsi.
3. Belah dua daerah berisi akar fungsi itu.
4. Tentukan daerah yang berisi akar fungsi.
5. Ulangi langkah 3 dan 4 sampai dianggap cukup.
6. Tentukan akar fungsi.

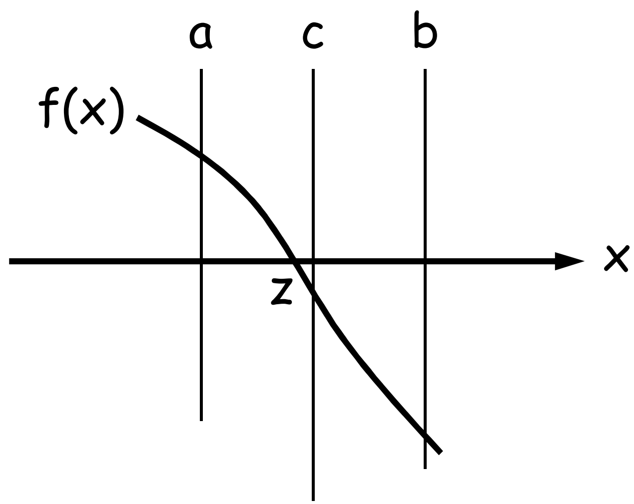


- Menentukan daerah yang berisi akar fungsi:

  Jika z merupakan akar fungsi, maka f(x < z) dan f(x > z) saling berbeda tanda.

  f(a)*f(c) negatif, berarti di antara a & c ada akar fungsi.

  f(b)*f(c) positif, berarti di antara b & c tidak ada akar fungsi



- Menentukan kapan proses pencarian akar fungsi berhenti:

  Proses pencarian akar fungsi dihentikan setelah keakuratan yang diinginkan dicapai, yang dapat diketahui dari kesalahan relatif semu.

$$\boxed{\text{kesalahan relatif semu} = \left|\frac{\text{perkiraan sebelum - perkiraan berikut}}{\text{perkiraan berikut}}\right|}$$

Kesalahan

$$\text{kesalahan mutlak} = |\text{perkiraan} - \text{nilai sebenarnya}|$$

$$\text{kesalahan relatif} = \left|\frac{\text{perkiraan} - \text{nilai sebenarnya}}{\text{nilai sebenarnya}}\right|$$

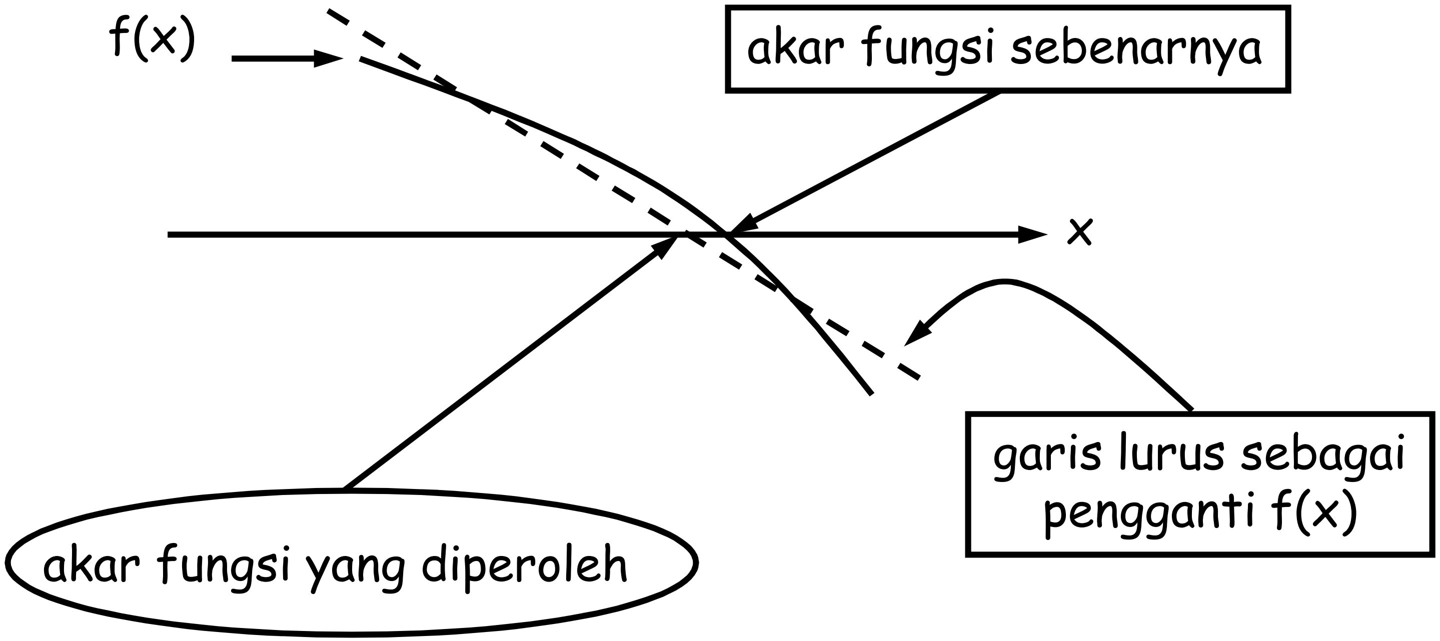
Dalam perhitungan numerik, nilai sebenarnya justru sering tidak diketahui, yang didapat hanya perkiraan terbaik. Karena perkiraan langkah berikut dianggap lebih akurat, yaitu lebih mendekati nilai sebenarnya, maka kesalahan yang dihitung yaitu:

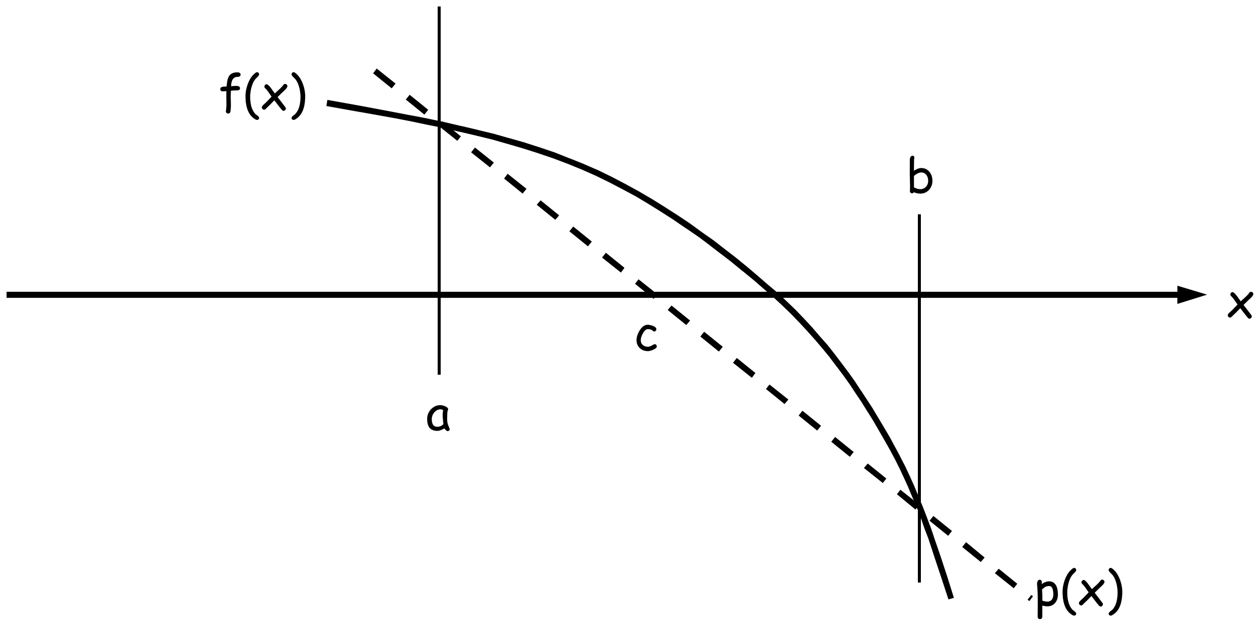
$$\text{kesalahan mutlak semu} = |\text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut}|$$

$$\text{kesalahan relatif semu} = \left|\frac{\text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut}}{\text{perkiraan berikut}}\right|$$

False Position

Prinsip: Di sekitar akar fungsi yang diperkirakan, anggap fungsi merupakan garis lurus. Titik tempat garis lurus itu memotong garis nol ditentukan sebagai akar fungsi.



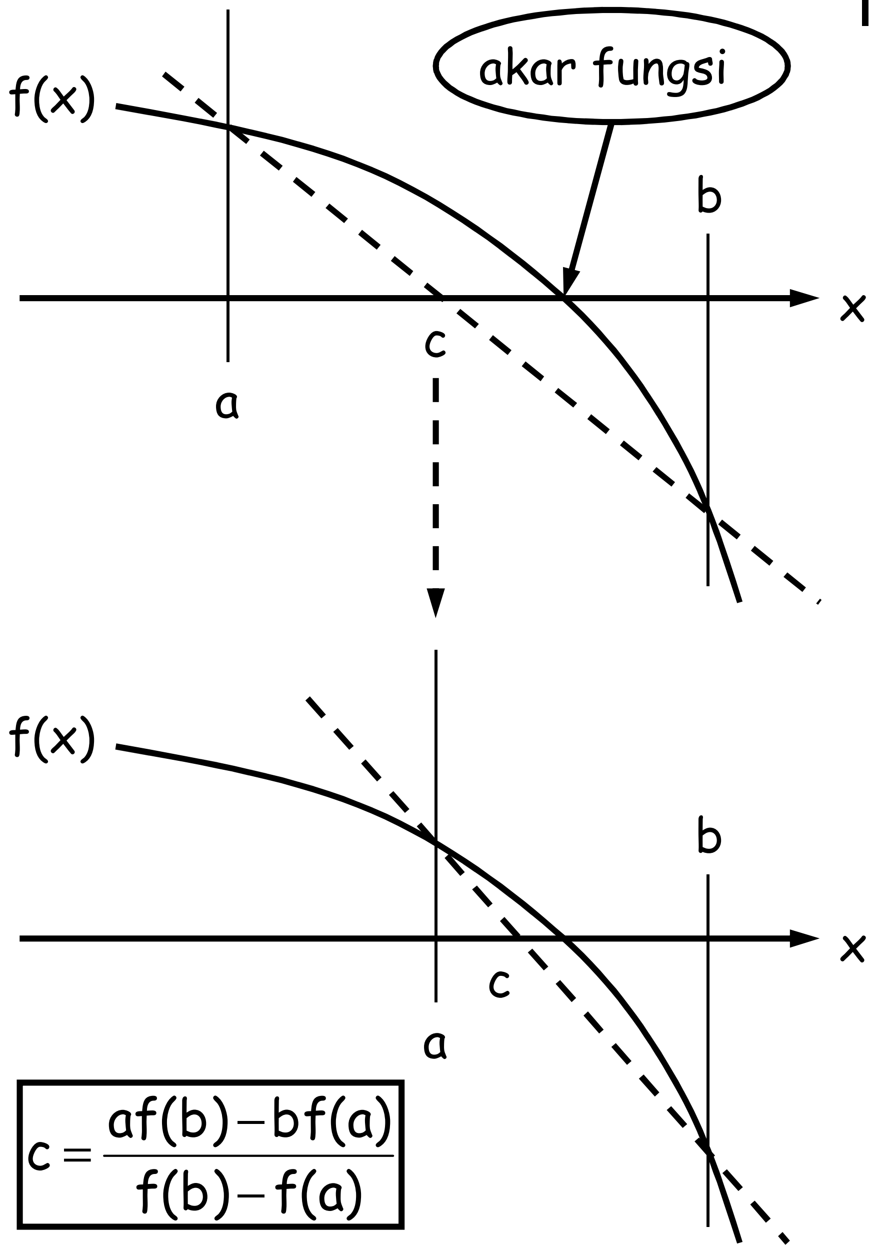


Diperoleh: $$p(x) = \left(\frac{x-b}{a-b}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b)$$

$$p(c) = 0 \longrightarrow \boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi (bisa dengan cara memplot fungsi).
2. Tentukan batas awal yang mengurung akar fungsi.
3. Tarik garis lurus penghubung nilai fungsi pada kedua batas, lalu cari titik potongnya dengan garis nol.
4. Geser salah satu batas ke titik potong itu, sementara batas lain tidak berubah. Ulangi langkah 3.
5. Ulangi langkah 4 sampai dianggap cukup.
6. Titik potong garis nol dan garis lurus yang terakhir dinyatakan sebagai akar fungsi.

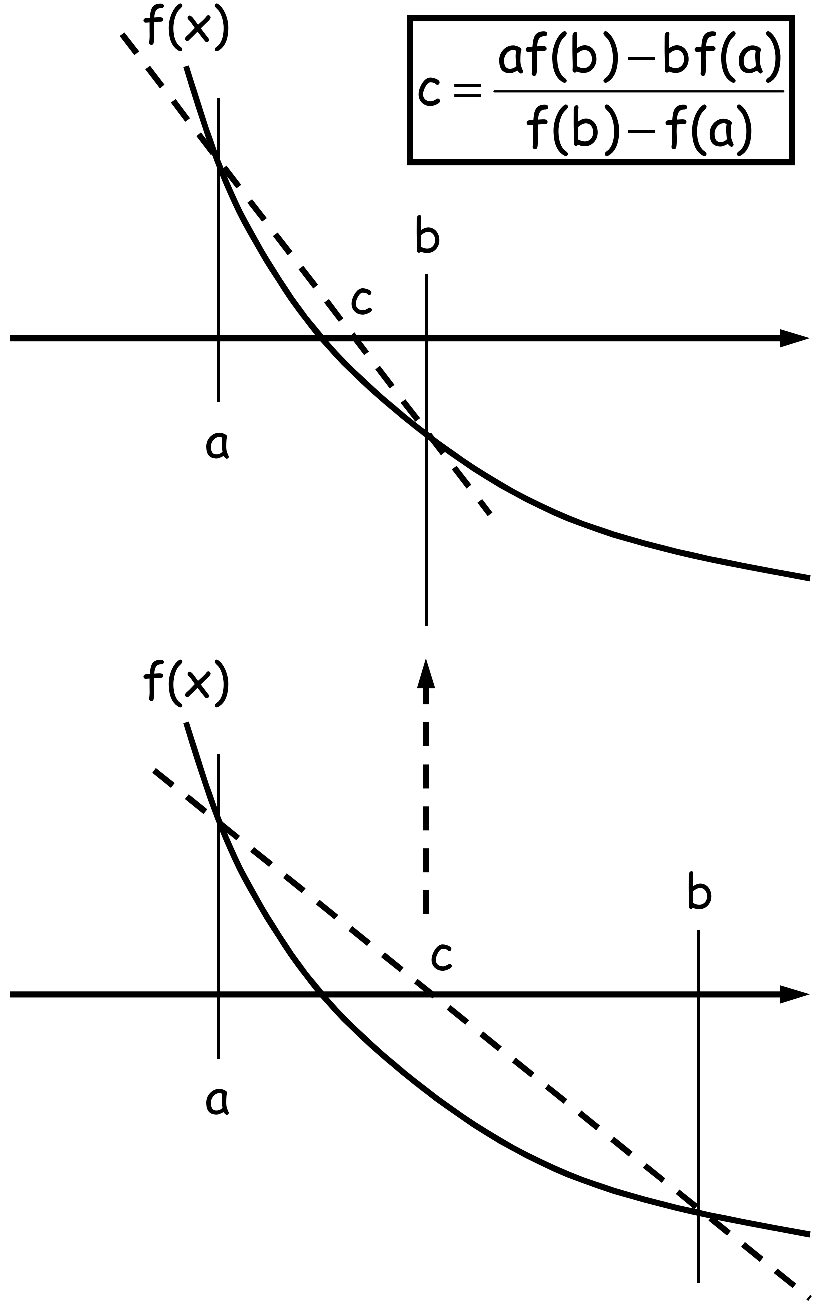


$$\boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Metode false position juga menggunakan dua batas seperti metode bisection. Namun, berbeda dari metode bisection, pada metoda false position hanya satu batas yang berubah.

Pada contoh sebelum ini, batas a berubah sementara batas b tetap. Pada contoh berikut terjadi sebaliknya.



Menghitung akar fungsi dengan metode false position, menggunakan a dan b sebagai batas awal:

- jika batas a tetap, batas b berubah:

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{af(x_i) - x_i f(a)}{f(x_i) - f(a)} \qquad (i = 0,1,2,\ldots;\ \ x_0 = b)}$$

- jika batas b tetap, batas a berubah:

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{bf(x_i) - x_i f(b)}{f(x_i) - f(b)} \qquad (i = 0,1,2,\ldots;\ \ x_0 = a)}$$

- kesalahan relatif semu:

$$\boxed{\Delta_{rel} = \left| \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1}} \right|}$$

Penghitungan dihentikan jika kesalahan relatif semu sudah mencapai / melampaui batas yang diinginkan.