Catatan Mekanika Kuantum 2

Teori Tumbukan / Teori Hamburan (lanjutan)

Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 19; Davydov, *Quantum Mechanics*, hlm. 377 – 378

C. Born approximation

(Lihat juga file Davydov377-378.pdf.)

- Ambillah persamaan Lippmann-Schwinger:

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\,. \tag{1}$$

  Kita ekspansikan $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}$ di ruas kanan, diperoleh:

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(r')\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\\ &\quad + \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^2\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(r')\int d\mathbf{r}''\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|/\hbar}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}V(r'')\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}'') + \ldots\,.\end{aligned} \tag{2}$$

  Jika ekspansi itu dimasukkan ke amplitudo hamburan:

$$A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0) = -(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\,, \tag{3}$$

  diperoleh:

$$\begin{aligned}A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0) = & -(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\\ & + \frac{2\pi\mu^2}{\hbar}\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\int d\mathbf{r}''\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|/\hbar}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}V(r'')\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}'')\\ & - \left(\frac{\mu}{\hbar}\right)^3\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\int d\mathbf{r}''\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|/\hbar}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}V(r'')\\ & \qquad \times\int d\mathbf{r}'''\frac{e^{ip_0|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'''|/\hbar}}{|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'''|}V(r''')\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}''')\\ & + \ldots\,,\end{aligned} \tag{4}$$

  yang disebut sebagai deret Born (*Born series*). Jika kita hanya ambil N suku pertama deret Born, berarti kita lakukan N^{th} *Born approximation*.

- *First Born approximation* adalah kita ambil hanya suku pertama deret Born:

$$A(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) \approx -(2\pi)^2 \mu\hbar \int d\mathbf{r}' \varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}') V(r') \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \approx -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| V \left| \varphi_{\mathbf{p}_0} \right\rangle , \qquad (5)$$

  sehingga penampang lintang differensial menjadi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_{p_0}(\theta)|^2 \approx \left(4\pi^2 \mu\hbar\right)^2 \left|\left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| V \left| \varphi_{\mathbf{p}_0} \right\rangle\right|^2 \qquad (6)$$

- Pada kondisi apa *first Born approximation* mencukupi? Apabila di $r = 0$ besar suku ke-2 ekspansi $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ di Eq. (2) sangat kurang dari besar suku pertama, berlaku *first Born approximation.*

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left| \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r') \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \right|_{r=0} &\ll \left|\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})\right|_{r=0} \\
\to \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left| \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ip_0 r'/\hbar}}{r'} V(r') \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}'/\hbar} \right| &\ll \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \\
\to \left| \int d\mathbf{r}' \frac{V(r')}{r'} e^{ip_0 r'/\hbar} e^{i\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}'/\hbar} \right| &\ll \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \\
\to \left| \int_0^\infty dr'\, r' V(r') e^{ip_0 r'/\hbar} \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' e^{ip_0 r'\cos\theta'/\hbar} \right| &\ll \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \qquad (\text{dipilih } \hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{p}}_0) \\
\to \left| \int_0^\infty dr'\, r' V(r') e^{ip_0 r'/\hbar} \int_{-1}^1 d(\cos\theta') e^{ip_0 r'\cos\theta'/\hbar} \int_0^{2\pi} d\phi' \right| &\ll \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \\
\to \left| \int_0^\infty dr'\, r' V(r') e^{ip_0 r'/\hbar} \int_{-1}^1 d(\cos\theta') e^{ip_0 r'\cos\theta'/\hbar} \right| &\ll \frac{\hbar^2}{\mu} \\
\to \left| \int_0^\infty dr'\, V(r') e^{ip_0 r'/\hbar} \frac{\hbar}{ip_0} \left(e^{ip_0 r'/\hbar} - e^{-ip_0 r'/\hbar} \right) \right| &\ll \frac{\hbar^2}{\mu} \\
\to \left| \int_0^\infty dr'\, V(r') \left(e^{2ip_0 r'/\hbar} - 1 \right) \right| &\ll \frac{p_0\hbar}{\mu} . \qquad (7)
\end{aligned}$$

  Persamaan (60) merupakan syarat umum untuk *first Born approximation.*

  Kita tinjau dua keadaan khusus berikut dan turunkan syarat untuk *first Born approximation*:

  - p_0 besar (energi proses hamburan tinggi):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dr'\, V(r') &\ll \frac{p_0\hbar}{\mu} , \ (\text{suku eksponensial sangat berosilasi, shg kontribusinya nol}) \\
\to \overline{V} d &\ll \frac{p_0\hbar}{\mu} , \ (\overline{V}, d = \text{ potensial rata-rata, jangkauan}) . \qquad (8)
\end{aligned}$$

  - p_0 kecil (energi proses hamburan rendah):

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\infty dr'\, V(r') \left(1 + \frac{2ip_0 r'}{\hbar} - 1 \right) \right| &\ll \frac{p_0\hbar}{\mu} , \ (\text{ekspan eksponensial sampai suku ke-2}) \\
\to \overline{V} d^2 &\ll \frac{\hbar^2}{\mu} , \ . \qquad (9)
\end{aligned}$$

D. Partial wave expansion

(Perhatikan video di https://youtu.be/PtA5cvg3CrU, yang menggambarkan hamburan dalam kerangka acuan laboratorium.)

- Partikel-partikel dalam berkas proyektil mendekati target dengan momentum linier / energi kinetik sama (dengan demikian, hamburan terjadi pada energi yang sama), namun momentum angular yang bervariasi.

  Dalam perhitungan teoretis, kita nyatakan fungsi gelombang $\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ dan $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ sebagai kombinasi linier / superposisi fungsi-fungsi gelombang eigen semua nilai momentum angular yang mungkin ($0 \to \infty$), yang disebut sebagai gelombang sebagian / parsial (*partial wave*). Dengan kata lain, kita ekspansikan $\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ dan $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ dalam fungsi gelombang eigen momentum angular (*partial wave expansion*).

- Dikarenakan interaksi berjangkauan terbatas (*finite range*), tidak semua proyektil mengalami hamburan / berinteraksi dengan target. Hanya proyektil dengan momentum angular dari nilai terendah (0) sampai nilai tertentu (l_{max}) yang mengalami hamburan; proyektil dengan nilai momentum angular lebih dari l_{max} tidak mengalami / tidak ambil bagian dalam proses hamburan.

  Dalam perhitungan teoretis, tidak semua gelombang parsial dimasukkan dalam perhitungan.

- Dalam proses hamburan momentum angular orbital l bersifat tetap, dikatakan, l merupakan *good quantum number.*[1]

  Secara teoretis hamburan dievaluasi per nilai momentum angular (per keadaan momentum angular). Perhitungan dimulai dengan mengambil nilai momentum angular terkecil, dilanjutkan dengan mengambil nilai momentum angular di atasnya dan hasilnya digabungkan, dilanjutkan dengan mengambil nilai momentum angular berikutnya dan hasilnya digabungkan, demikian iterasi ini terus dilakukan hingga dicapai hasil yang konvergen, yaitu hasil perhitungan tidak lagi berubah secara signifikan, meskipun memasukkan keadaan momentum angular berikutnya. Cara perhitungan seperti ini disebut teknik gelombang parsial (*partial wave technique*, *partial wave approach*).

- Setelah disampaikan ide teknik gelombang parsial di atas, kini kita lihat lebih detil formulasinya.

  Secara umum, ekspansi $\varphi(\mathbf{r})$ dan $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ (agar lebih sederhana label $\mathbf{p}_0$ disembunyikan) dalam gelombang parsial $\varphi_{lm}(\mathbf{r})$ dan $\psi^{(+)}_{lm}(\mathbf{r})$ adalah:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{lm} A_{lm}\varphi_{lm}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} A_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{10}$$

[1] Apabila spin juga diperhitungkan, bukan momentum angular orbital yang tetap, melainkan momentum angular total.

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} A_{lm}\psi_{lm}^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} A_{lm} R_l^{(+)}(r) Y_{lm}(\theta,\phi)\,, \tag{11}$$

dengan A_{lm} koefisien ekspansi[2], $Y_{lm}(\theta,\phi)$ fungsi harmonik bola, $R_l(r)$ dan $R_l^{(+)}(r)$ fungsi radial, yang masing-masing memenuhi persamaan radial (lihat Gasiorowicz Eqs. (8-14) dan (8-15)):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}E\right) R_l(r) = 0 \tag{12}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}E\right) R_l^{(+)}(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) R_l^{(+)}(r)\,. \tag{13}$$

Diperoleh (lihat Gasiorowicz Sect. 8-4 dan juga hlm. W-41 - W-42):[3]

$$R_l(r) = j_l(kr)\ ,\ \left(k = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}E} = \frac{p_0}{\hbar}\right) \tag{16}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)\ ,\ (\text{dipilih } \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}_0)\,. \tag{17}$$

Dengan cara yang sama seperti di Gasiorowicz hlm. W-41 - W-42, diperoleh:[4]

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l R_l^{(+)}(r) P_l(\cos\theta)\,. \tag{19}$$

- Hamburan diamati di titik yang jauh dari pusat hamburan. Karena itu, kita evaluasi $R_l(r)$ dan $R_l^{(+)}(r)$ untuk r besar, lebih tepatnya untuk $kr \gg l$.

$$R_l(r) = j_l(kr) \simeq \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)\ ,\ (kr \gg l)$$

---

[2]Perhatikan bahwa koefisien ekspansi untuk $\varphi_{lm}(\mathbf{r})$ dan $\psi_{lm}^{(+)}(\mathbf{r})$ sama, karena hamburan berdiri sendiri untuk tiap nilai momentum angular, tidak saling bergantung, mengingat hukum kekekalan momentum angular (pada kasus ini spin tidak diperhitungkan): $\varphi_{lm}(\mathbf{r})$ menghasilkan $\psi_{lm}^{(+)}(\mathbf{r})$ dan bobot $\varphi_{lm}(\mathbf{r})$ dalam $\varphi(\mathbf{r})$ sama dengan bobot $\psi_{lm}^{(+)}(\mathbf{r})$ dalam $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$.

[3]Persamaan (17) menunjukkan ekspansi fungsi gelombang bebas $\varphi(\mathbf{r})$ dengan momentum linier $\mathbf{p}_0$ dalam gelombang parsial untuk pilihan $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}_0$. Secara umum, untuk sembarang arah $\hat{\mathbf{z}}$, ekspansi tersebut ditunjukkan oleh Eq. (10) dan diperoleh:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}/\hbar} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta_{p_0},\phi_{p_0}) Y_{lm}(\theta,\phi)\,. \tag{14}$$

Apabila dipilih $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}_0$, berarti $\theta_{p_0} = 0$ dan (lihat Gasiorowicz Eqs. (7-45) dan (7B-27)):

$$Y_{lm}^*(0,\phi_{p_0}) = \delta_{m0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\ ,\ Y_{l0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\ P_l(\cos\theta)\,, \tag{15}$$

sehingga diperoleh Eq. (17).

[4]Untuk mudahnya, perhatikan saja $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ untuk r sangat besar:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + A_{p_0}(\theta)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ikr}}{r}\,. \tag{18}$$

Disimpulkan bahwa $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ tidak bergantung pada sudut azimuth ϕ, sehingga cara yang ditunjukkan di Gasiorowicz hlm. W-41 - W-42 untuk $\varphi(\mathbf{r})$ dapat digunakan juga untuk $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$.

$$\simeq \frac{i}{2kr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right) \,. \tag{20}$$

Persamaan (20) menunjukkan bahwa di tempat yang jauh dari pusat hamburan keadaan bebas (*free state*) merupakan superposisi gelombang bebas yang datang menuju pusat hamburan (suku pertama) dan gelombang bebas yang pergi menjauhi pusat hamburan (suku kedua) dengan keduanya memiliki amplitudo yang sama besar (berarti, peluangnya sama besar).

Untuk mencari $R_l^{(+)}(r)$, mula-mula kita masukkan Eq. (17) ke Eq. (18) dan bandingkan dengan Eq. (19):

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) + A_{p_0}(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l R_l^{(+)}(r)P_l(\cos\theta)\,. \tag{21}$$

Jika, supaya mudah, kita nyatakan:

$$A_{p_0}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l B_l(k)P_l(\cos\theta)\,, \tag{22}$$

dengan $B_l(k)$ suatu nilai yang bergantung pada l dan k (atau p_0, karena $p_0 = \hbar k$), diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left(j_l(kr) + B_l(k)\frac{e^{ikr}}{r}\right)P_l(\cos\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l R_l^{(+)}(r)P_l(\cos\theta) \\ &\rightarrow R_l^{(+)}(r) = j_l(kr) + B_l(k)\frac{e^{ikr}}{r}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Untuk $kr \gg l$, didapatkan:

$$R_l^{(+)}(r) \simeq \frac{i}{2kr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right) + B_l(k)\frac{e^{ikr}}{r}\,. \tag{24}$$

Jika, lagi-lagi supaya mudah, kita nyatakan (kedua suku $R_l^{(+)}(r)$ di Eq. (24) harus berdimensi sama):

$$B_l(k) = \frac{i}{2k}C_l e^{-il\pi/2}\,, \tag{25}$$

diperoleh:

$$\begin{aligned}R_l^{(+)}(r) &\simeq \frac{i}{2kr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right) + \frac{i}{2k}C_l e^{-il\pi/2}\frac{e^{ikr}}{r} \\ &\simeq \frac{i}{2kr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - (1-C_l)e^{i(kr-l\pi/2)}\right)\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Terakhir, supaya lebih sederhana, dinyatakan:

$$C_l = 1 - S_l\,, \tag{27}$$

sehngga diperoleh:

$$R_l^{(+)}(r) \simeq \frac{i}{2kr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)}\right)\,. \tag{28}$$

Persamaan (28) menunjukkan bahwa di tempat yang jauh dari pusat hamburan, keadaan hamburan (*scattering state*) merupakan superposisi gelombang bebas yang datang menuju pusat hamburan (suku pertama) dan gelombang bebas yang pergi menjauhi pusat hamburan (suku kedua) dengan amplitudo berbeda, yang bergantung pada momentum angular, yaitu S_l.

- Sesuai hukum kekekalan fluks, Eq. (20) jelas menunjukkan bahwa di $r = 0$ fluks datang sama dengan fluks pergi, tidak ada partikel yang hilang. Untuk gelombang hamburan di Eq. (28) hal yang sama juga harus berlaku. Ini berarti besar (magnitude) amplitudo gelombang bebas pergi sama dengan besar amplitudo gelombang bebas datang, yaitu 1, agar fluks datang sama dengan fluks pergi. Jadi

$$|S_l|^2 = 1 \tag{29}$$

dan S_l hanya merupakan faktor fase. Didefinisikan:

$$S_l = e^{2i\delta_l}\,, \tag{30}$$

dengan δ_l adalah pergeseran fase (*phase shift*) gelombang hamburan terhadap gelombang bebas, sebagaimana ditunjukkan oleh *probability density* berikut ini:

$$\begin{aligned}
R_l^{(+)}(r) &\simeq \frac{i}{2kr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{2i\delta_l}e^{i(kr-l\pi/2)}\right) \\
&\simeq \frac{i}{2kr}e^{i\delta_l}\left(e^{-i\delta_l}e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i\delta_l}e^{i(kr-l\pi/2)}\right) \\
&\simeq \frac{i}{2kr}e^{i\delta_l}\left(e^{-i(kr-l\pi/2+\delta_l)} - e^{i(kr-l\pi/2+\delta_l)}\right) \\
&\simeq \frac{1}{kr}e^{i\delta_l}\sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right) \\
\to |R_l^{(+)}(r)|^2 &\simeq \frac{1}{(kr)^2}\sin^2\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right) \qquad (31) \\
R_l(r) &\simeq \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right) \\
\to |R_l(r)|^2 &\simeq \frac{1}{(kr)^2}\sin^2\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)\,. \qquad (32)
\end{aligned}$$

- Membandingkan Eqs. (31) dan (32), kita lihat bahwa yang membedakan keadaan hamburan (proyektil dan target berinteraksi) dari keadaan bebas (proyektil dan target tidak berinteraksi) hanyalah δ_l. Dengan kata lain, δ_l menyimpan semua informasi tentang hamburan. Dari δ_l orang dapat menghitung besaran-besaran hamburan (untuk hamburan tanpa spin besaran hamburan hanya penampang lintang) dan juga meneliti interaksi antar proyektil dan target (membuat model interaksi antar proyektil dan target).

- Dari Eqs. (22), (25), (27), (30), dan juga $e^{-il\pi/2} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{-l} = i^{-l}$, amplitudo hamburan diperoleh sebagai:

$$A_{p_0}(\theta) = \frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-S_l)P_l(\cos\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)\,. \tag{33}$$

Penampang lintang differensial didapatkan sebagai:[5]

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{k^2}\sum_{l',l=0}^{\infty}(2l'+1)(2l+1)P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\delta_{l'}\sin\delta_l e^{i(\delta_l-\delta_{l'})} \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{l',l=0}^{\infty}(2l'+1)(2l+1)P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\delta_{l'}\sin\delta_l\cos(\delta_l-\delta_{l'}) \qquad (35)
\end{aligned}$$

dan penampang lintang total sebagai:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l',l=0}^{\infty}(2l'+1)(2l+1)\sin\delta_{l'}\sin\delta_l\cos(\delta_l-\delta_{l'})\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\,P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta) \\
&= \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l',l=0}^{\infty}(2l'+1)(2l+1)\sin\delta_{l'}\sin\delta_l\cos(\delta_l-\delta_{l'})\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta) \\
&= \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l',l=0}^{\infty}(2l'+1)(2l+1)\sin\delta_{l'}\sin\delta_l\cos(\delta_l-\delta_{l'})\frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} \\
&= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l\,. \qquad (36)
\end{aligned}$$

- Ambillah komponen imajiner amplitudo hamburan:

$$\mathrm{Im}\,A_{p_0}(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l P_l(\cos\theta)\,. \qquad (37)$$

Untuk $\theta = 0$ (*forward scattering*):

$$\mathrm{Im}\,A_{p_0}(0) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l P_l(1) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l\,. \qquad (38)$$

Bandingkan Eq. (38) dengan Eq. (36), kita dapatkan:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\,A_{p_0}(0)\,. \qquad (39)$$

Relasi antara σ dan komponen imajiner amplitudo hamburan untuk $\theta = 0$ yang ditunjukkan oleh Eq. (39) disebut *optical theorem.*

---

[5] Komponen $\sin(\delta_l - \delta_{l'})$ nol, seperti ditunjukkan berikut ini:

$$\begin{aligned}
\sum_{l',l=0}^{\infty}D_{l'}D_l\sin(\delta_l-\delta_{l'}) &= \sum_{l'<l}D_{l'}D_l\sin(\delta_l-\delta_{l'}) + \sum_{l'>l}D_{l'}D_l\sin(\delta_l-\delta_{l'}) \\
&= \sum_{l'<l}D_{l'}D_l\sin(\delta_l-\delta_{l'}) + \sum_{l>l'}D_lD_{l'}\sin(\delta_{l'}-\delta_l) \\
&= \sum_{l'<l}D_{l'}D_l\sin(\delta_l-\delta_{l'}) - \sum_{l'<l}D_{l'}D_l\sin(\delta_l-\delta_{l'}) \\
&= 0\,. \qquad (34)
\end{aligned}$$

- Dalam perhitungan gelombang parsial kita nyatakan amplitudo hamburan sebagai berikut:

$$A_{p_0}(\theta) \approx \sum_{l=0}^{l_{max}} A_{p_0,l}(\theta)\,, \tag{40}$$

dengan l_{max} baru diketahui kemudian setelah dicapai konvergensi dan

$$A_{p_0,l}(\theta) = \frac{1}{k}(2l+1)e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta)\,. \tag{41}$$

Mula-mula, dihitung:

$$A_{p_0}(\theta) \approx A_{p_0,0}(\theta) \tag{42}$$

dan penampang lintang:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{sc}(\theta)\ r^2}{J_{inc}} = |A_{p_0}(\theta)|^2 \tag{43}$$

$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \int d\Omega\, |A_{p_0}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\, |A_{p_0}(\theta)|^2\,. \tag{44}$$

Berikutnya, dihitung:

$$A_{p_0}(\theta) \approx A_{p_0,0}(\theta) + A_{p_0,1}(\theta) \tag{45}$$

dan penampang lintang sesuai Eqs. (43) & (44). Berikutnya, dihitung:

$$A_{p_0}(\theta) \approx A_{p_0,0}(\theta) + A_{p_0,1}(\theta) + A_{p_0,3}(\theta) \tag{46}$$

dan penampang lintang sesuai Eqs. (43) & (44). Demikian seterusnya, sampai diperoleh nilai penampang lintang yang konvergen.

- Nilai l_{max} ditentukan oleh jangkauan interaksi dan juga energi hamburan. Ambillah persamaan radial untuk $R_l^{(+)}(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R_l^{(+)}(r) + V(r)R_l^{(+)}(r) = ER_l^{(+)}(r)\,. \tag{47}$$

Ingat kembali bahwa dua suku pertama di sisi kiri memberikan energi kinetik komponen gerak radial, suku berikutnya berturut-turut adalah energi potensial penghalang (sentrifugal) dan energi potensial (interaksi). Semuanya dijumlahkan menjadi energi total di ruas kanan.

Untuk suatu nilai l, pada titik balik (*turning point*) jarak antar proyektil dan target mencapai nilai terkecil, sebut saja r_l. Di titik balik tersebut kecepatan radial nol, demikian pula energi kinetik komponen gerak radial, sehingga diperoleh relasi:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r_l^2} + V(r_l) = E \quad \rightarrow \quad \sqrt{l(l+1)} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r_l))}\, r_l\,. \tag{48}$$

Untuk $r_l < d$, dengan d jangkauan interaksi, interaksi masih bekerja ($V(r_l) \neq 0$). Berarti, gelombang parsial untuk nilai l tersebut ambil bagian dalam proses hamburan. Sebaliknya, untuk $r_l > d$ gelombang parsial untuk nilai l tersebut tidak ambil bagian dalam proses hamburan, karena $V(r_l) = 0$. Nilai l tertinggi, sebut saja l_{max}, yang untuk nilai tersebut gelombang parsial masih ambil bagian dalam proses hamburan, dapat dihitung dengan mengambil r_l sedikit lebih dari d, sehingga $V(r_l) = 0$. Diperoleh:

$$\sqrt{l_{max}(l_{max}+1)} \approx \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}E}\, d = \frac{p_0}{\hbar} d \,. \tag{49}$$

Nilai l_{max}, dengan kata lain jumlah gelombang parsial yang dibutuhkan, meningkat apabila energi meningkat dan / atau jangkauan interaksi lebih panjang.

E. Hamburan partikel identik

(Perhatikan video di https://youtu.be/2LxRC3J-Hd4, yang menggambarkan hamburan partikel identik dalam kerangka acuan pusat massa.)

- Apabila proyektil dan target partikel-partikel yang identik, kita tidak tahu, apakah yang kita deteksi di keadaan akhir adalah proyektil terhambur atau target terpental. Dalam kerangka acuan pusat massa seperti digambarkan dalam video tersebut, kita tidak tahu apakah proses A atau proses B yang terjadi. Tidak dapat dipastikan apakah partikel-partikel yang dideteksi semuanya sampai ke detektor melalui proses A saja atau proses B saja. Kedua proses itu terjadi dan, karena itu, kedua-duanya proses A dan proses B harus diperhitungkan.

- Dalam mekanika kuantum, tiap proses A dan B dinyatakan oleh fungsi gelombang. Memperhitungkan keduanya berarti menjumlahkan fungsi gelombang untuk proses A dan fungsi gelombang untuk proses B. Jadi, fungsi gelombang hamburan merupakan superposisi fungsi gelombang proses A dan fungsi gelombang proses B.

- Lihat lagi fungsi gelombang hamburan:

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + A(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r} \,. \tag{50}$$

  Perhatikan suku kedua fungsi gelombang hamburan di Eq. (50), karena kita tertarik pada gelombang terhambur (*scattered wave*):

$$\psi^{(+)}_{sc}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r} \,. \tag{51}$$

  Lagipula, baik untuk proses A maupun proses B, gelombang datang (*incoming wave*, yaitu suku pertama fungsi gelombang hamburan di Eq. (50)), sama.

  Scattered wave untuk proses B dapat diperoleh dari *scattered wave* untuk proses A dengan mempertukarkan kedua partikel di keadaan akhir (dengan momentum linier $\mathbf{p}'$) memakai operator permutasi P_{12}. Kita hanya perlu mengerjakan operator permutasi untuk amplitudo hamburan $A(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0)$:[6]

$$\begin{aligned} A_{p_0}(\theta) = A^{(A)}(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle \qquad (54) \\ A^{(B)}(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle P_{12}\varphi_{\mathbf{p}'} \right| V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle \\ &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| P_{12}^{-1} V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle \\ &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| P_{12} V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle \\ &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{-\mathbf{p}'} \right| V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle \\ &= A^{(A)}(-\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) \\ &= A_{p_0}(\pi - \theta)\,, \qquad (55) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh *scattered wave* total:

$$\psi^{(+)}_{sc}(\mathbf{r}) = \psi^{(+)}_{sc,A}(\mathbf{r}) + \psi^{(+)}_{sc,B}(\mathbf{r}) = \left(A_{p_0}(\theta) + A_{p_0}(\pi - \theta)\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}\,. \qquad (56)$$

Dengan demikian, penampang lintang dihitung sebagai:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_{p_0}(\theta) + A_{p_0}(\pi - \theta)|^2\,. \qquad (57)$$

Amplitudo hamburan total di Eqs. (56), dengan demikian, dihitung sebagai:

$$\begin{aligned} A^{total}_{p_0}(\theta) &= A_{p_0}(\theta) + A_{p_0}(\pi - \theta) \\ &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle - (2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| P_{12} V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle \\ &= -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| (1 + P_{12}) V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle\,. \qquad (58) \end{aligned}$$

- Perhatikan bahwa Eq. (58) berlaku untuk hamburan tanpa spin (interaksi tidak bergantung pada spin) dan untuk sistem boson, karena keadaan sistem boson bersifat simetrik terhadap pertukaran partikel. Sebaliknya, sistem fermion memiliki keadaan yang bersifat antisimetrik terhadap pertukaran partikel. Dengan demikian, untuk sistem fermion amplitudo hamburan total dihitung sebagai:

$$A^{total}_{p_0}(\theta) = -(2\pi)^2 \mu\hbar \left\langle \varphi_{\mathbf{p}'} \right| (1 - P_{12}) V \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0} \right\rangle\,. \qquad (59)$$

Supaya lebih jelas, untuk sistem boson dan sistem fermion, kita tambahkan keadaan spin $|\lambda_1\rangle$ dan $|\lambda_2\rangle$:

$$\text{boson} \;:\; |\varphi_{\mathbf{p}_0} \lambda_1 \lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + P_{12}) \left|\varphi_{\mathbf{p}_0}\right\rangle |\lambda_1\rangle\, |\lambda_2\rangle \qquad (60)$$

[6] Operator permutasi P_{12} merupakan operator uniter: $P_{12}^{-1} P_{12} = P_{12} P_{12}^{-1} = 1$. Operasi P_{12} 2 kali berturut-turut membawa kembali ke keadaan semula: $P_{12}^2 = P_{12} P_{12} = 1$, sehingga operasi P_{12} sama saja dengan operasi P_{12}^{-1}. Seperti ditunjukkan berikut ini, $P_{12}^{+} = P_{12}^{-1}$:

$$\langle P_{12}\psi | P_{12}\psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \qquad (52)$$

$$\langle P_{12}\psi | P_{12}\psi \rangle = \langle \psi | P_{12}^{+} P_{12} | \psi \rangle \rightarrow P_{12}^{+} P_{12} = 1 \rightarrow P_{12}^{+} = P_{12}^{-1}\,. \qquad (53)$$

$$\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+P_{12})\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle \tag{61}$$

$$\text{fermion}\;:|\varphi_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-P_{12})|\varphi_{\mathbf{p}_0}\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle \tag{62}$$

$$\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-P_{12})\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle \tag{63}$$

Perhatikan, pada Eqs. (60) dan (61) keadaan sistem boson sudah tersimetrisasi dan pada Eqs. (62) dan (63) keadaan sistem fermion sudah terantisimetrisasi, dengan kata lain keadaan sistem merupakan keadaan eigen operator permutasi P_{12}, seperti dapat ditunjukkan contoh berikut:

$$\begin{aligned}
\text{boson}\;:P_{12}|\varphi_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_{12}(1+P_{12})|\varphi_{\mathbf{p}_0}\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{12}+1)|\varphi_{\mathbf{p}_0}\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= |\varphi_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\rangle \qquad (64)\\
\text{fermion}\;:P_{12}|\varphi_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_{12}(1-P_{12})|\varphi_{\mathbf{p}_0}\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{12}-1)|\varphi_{\mathbf{p}_0}\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= -|\varphi_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\rangle\;. \qquad (65)
\end{aligned}$$

Terapkan Eqs. (60), (61), (62), dan (63) pada amplitudo hamburan:[7]

$$\begin{aligned}
\text{boson}\;:A^{total}_{p_0,\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}(\theta) &= -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\varphi_{\mathbf{p}'}\lambda_1'\lambda_2'|V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\right\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\frac{1}{2}\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|(1+P_{12})V(1+P_{12})\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\frac{1}{2}\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|(1+P_{12})^2V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|(1+P_{12})V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&\quad -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|P_{12}V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&\quad -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\lambda_2'|\langle\lambda_1'|\langle\varphi_{-\mathbf{p}'}|V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= A_{p_0,\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}(\theta)+A_{p_0,\lambda_2'\lambda_1',\lambda_1\lambda_2}(\pi-\theta) \qquad (67)\\
\text{fermion}\;:A^{total}_{p_0,\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}(\theta) &= -(2\pi)^2\mu\hbar\langle\varphi_{\mathbf{p}'}\lambda_1'\lambda_2'|V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\lambda_1\lambda_2\right\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\frac{1}{2}\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|(1-P_{12})V(1-P_{12})\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle\\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\frac{1}{2}\langle\lambda_1'|\langle\lambda_2'|\langle\varphi_{\mathbf{p}'}|(1-P_{12})^2V\left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle|\lambda_1\rangle|\lambda_2\rangle
\end{aligned}$$

[7]Interaksi sentral (*central force*) V bersifat invarian terhadap pertukaran partikel:

$$P_{12}VP_{12}^{-1}=V\to P_{12}V=VP_{12}\text{ atau }[V,P_{12}]=0\quad(\text{bukti: }P_{12}VP_{12}^{-1}=VP_{12}P_{12}^{-1}=V)\,. \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(2\pi)^2\mu\hbar \langle\lambda_1'| \langle\lambda_2'| \langle\varphi_{\mathbf{p}'}| (1-P_{12})V \left|\psi_{\mathbf{p}_0}^{(+)}\right\rangle |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar \langle\lambda_1'| \langle\lambda_2'| \langle\varphi_{\mathbf{p}'}| V \left|\psi_{\mathbf{p}_0}^{(+)}\right\rangle |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \\
&\quad + (2\pi)^2\mu\hbar \langle\lambda_1'| \langle\lambda_2'| \langle\varphi_{\mathbf{p}'}| P_{12}V \left|\psi_{\mathbf{p}_0}^{(+)}\right\rangle |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar \langle\lambda_1'| \langle\lambda_2'| \langle\varphi_{\mathbf{p}'}| V \left|\psi_{\mathbf{p}_0}^{(+)}\right\rangle |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \\
&\quad + (2\pi)^2\mu\hbar \langle\lambda_2'| \langle\lambda_1'| \langle\varphi_{-\mathbf{p}'}| V \left|\psi_{\mathbf{p}_0}^{(+)}\right\rangle |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \\
&= A_{p_0,\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}(\theta) - A_{p_0,\lambda_2'\lambda_1',\lambda_1\lambda_2}(\pi-\theta)\,. \qquad (68)
\end{aligned}
$$