Catatan Mekanika Kuantum 2

Teori Tumbukan / Teori Hamburan

Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 19; Liboff, *Introductory Quantum Mechanics*, hlm. 606 & 607; Davydov, *Quantum Mechanics*, hlm. 374 – 376 & 380 – 382

Peristiwa tumbukan menjadi alat utama untuk mempelajari, meneliti interaksi antar partikel. Peristiwa tumbukan yang dibahas di sini untuk daerah energi nonrelativistik, sehingga secara teoretis dapat dievaluasi menggunakan mekanika kuantum nonrelativistik. Secara tingkas, gambaran eksperimen peristiwa ini, ada seberkas partikel sebagai proyektil yang diarahkan ke sekumpulan partikel lain sebagai target diam. Setelah kedua kelompok partikel bertemu, bertumbukan, berinteraksi, proyektil terhambur dan target terpental. Proyektil yang terhambur dideteksi, dicacah, dihitung jumlahnya per satuan waktu dan orang dapatkan nilai besaran yang dikenal dengan penampang lintang (*cross section*) hamburan.

Materi teori hamburan dalam catatan ini tidak sepenuhnya mengikuti Gasiorowicz Bab 19, melainkan hanya sebagian, namun dilengkapi dengan materi dari literatur lain.

A. Penampang lintang hamburan menurut eksperimen

(Lihat juga file Liboff606-607.pdf.)

- Proyektil mendekati target dengan momentum $\mathbf{k}_1$. Target diam ($\mathbf{k}_2 = 0$).
- Jika target sedemikian tipis, maka dapat dianggap tiap partikel dalam berkas proyektil hanya mengalami satu kali tumbukan dengan satu partikel dalam target (ingat hamburan Rutherford dengan target lembaran emas yang dibuat sangat tipis).
- Setelah tumbukan, proyektil terhambur (*scattered*) dengan momentum $\mathbf{k}_1'$. Arah momentum $\mathbf{k}_1'$ membentuk sudut θ_{lab} terhadap arah momentum awal $\mathbf{k}_1$. Sudut θ_{lab} disebut sudut hambur (*scattering angle*) (dalam kerangka laboratorium).
- Proyektil terhambur dengan sudut hambur θ_{lab} bermacam-macam. Mungkin ada yang dengan $\theta_{lab} > 0$, ada yang dengan $\theta_{lab} = 0$ (hamburan ke muka / *forward scattering*). Proyektil yang terhambur ke muka ($\theta_{lab} = 0$) berbaur dengan proyektil yang diteruskan (*transmitted*). Sangat sulit membedakan proyektil yang terhambur dari yang diteruskan, sehingga pada arah ini sulit mengukur penampang lintang.
- Pada arah sudut θ_{lab} dipasang detektor. Jumlah proyektil terhambur dengan sudut θ_{lab} melewati detektor tiap satuan waktu tiap satuan luas penampang detektor yang dilewati secara tegak lurus disebut sebagai fluks proyektil terhambur (*scattered flux*) $\mathbf{J}_{sc}(\theta_{lab})$.

- Jumlah proyektil terhambur dengan sudut θ_{lab} per satuan waktu menembus secara tegak lurus suatu elemen luas $d\mathbf{S}$ adalah $\mathbf{J}_{sc}(\theta_{lab}) \cdot d\mathbf{S}$. Sebut saja ini dN, maka $dN = \mathbf{J}_{sc}(\theta_{lab}) \cdot d\mathbf{S}$.

- Jika elemen luas $d\mathbf{S}$ berada ada jarak r dari target (pusat hamburan / *scattering center*), maka $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} r^2 d\Omega$, dengan $d\Omega$ elemen sudut ruang. Dengan demikian, $dN = \mathbf{J}_{sc}(\theta_{lab}) \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 d\Omega = J_{sc}(\theta_{lab}) r^2 d\Omega$.

- Fluks proyektil mula-mula (fluks proyektil yang mendekati target / *incident flux*) adalah $\mathbf{J}_{inc}$. Wajar, apabila nilai $\mathbf{J}_{inc}$, yaitu J_{inc}, digandakan, maka dN juga tergandakan secara sama. Dengan kata lain, dN dan J_{inc} berhubungan secara linier / berbanding lurus. Nilai kesebandingan tersebut memiliki dimensi luas dan disebut sebagai penampang lintang $d\sigma$:

$$dN \propto J_{inc} = J_{inc}\, d\sigma \to d\sigma = \frac{dN}{J_{inc}} = \frac{J_{sc}(\theta_{lab}) r^2}{J_{inc}} d\Omega\,. \tag{1}$$

- Penampang lintang per satuan sudut ruang disebut sebagai penampang lintang differensial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{sc}(\theta_{lab}) r^2}{J_{inc}}\,. \tag{2}$$

- Jumlah penampang lintang differensial untuk seluruh sudut ruang disebut sebagai penampang lintang total:

$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\,. \tag{3}$$

B. Penampang lintang hamburan menurut perhitungan teoretis

(Lihat juga file Davydov374-376.pdf dan Davydov380-382.pdf.)

- Kita asumsikan interaksi antara proyektil dan target merupakan *central force* $V(r)$. Perhitungan teoretis dapat menggunakan variabel-variabel bebas (lihat Gasiorowicz Sect. 13-1) posisi relatif $\mathbf{r}$ dan posisi pusat massa $\mathbf{R}$ atau momentum relatif $\mathbf{p}$ dan momentum pusat massa $\mathbf{K}$:[1]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,,\ \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \qquad / \qquad \mathbf{p} = \frac{m_2\mathbf{k}_1 - m_1\mathbf{k}_2}{m_1+m_2}\,,\ \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\,. \tag{4}$$

- Kita ambil $V(r)$ yang berjangkauan berhingga (*of finite range*). Jadi, ketika proyektil dan target masih saling berjauhan belum ada interaksi antar keduanya ($\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$), barulah setelah jarak antar keduanya kurang dari nilai tertentu ada interaksi ($V(r) \neq 0$).

- Kita mulai dengan persamaan Schrödinger untuk proses hamburan yang terjadi pada energi E (catatan, μ adalah massa tereduksi (*reduced mass*) proyektil dan target):

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(r)\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{5}$$

[1] Dalam catatan ini dipakai huruf k sebagai notasi untuk momentum di kerangka acuan laboratorium.

Fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r})$ merepresentasikan bukan hanya proyektil, bukan hanya target, melainkan sistem yang terdiri dari proyektil dan target untuk sembarang posisi relatif proyektil terhadap target.

- Selama proses hamburan energi E tetap. Nilai E dapat dihitung dari momentum pada keadaan awal $\mathbf{p}_0$, ketika proyektil dan target masih saling berjauhan, sehingga $V(r) = 0$ dan E hanya energi kinetik:

$$E = \frac{\mathbf{p}_0^2}{2\mu} \,. \tag{6}$$

Persamaan Schrödinger Eq. (5) menjadi:

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(r)\right)\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_0^2}{2\mu}\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) \tag{7}$$

$$\rightarrow \left(\hat{\mathbf{p}}^2 + 2\mu V(r)\right)\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_0^2\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$$

$$\rightarrow \left(-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + 2\mu V(r)\right)\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_0^2\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$$

$$\rightarrow \left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\mathbf{p}_0^2}{\hbar^2}\right)\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) \,. \tag{8}$$

- Pada keadaan awal proyektil dan target saling berjauhan, $V(r) = 0$. Persamaan (8) menjadi:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\mathbf{p}_0^2}{\hbar^2}\right)\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = 0 \,, \tag{9}$$

dengan fungsi gelombang:

$$\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}/\hbar} \,. \tag{10}$$

Kita gunakan normalisasi standar, berbeda dari yang digunakan di Davydov (Eq. (95.3)).

- Seperti apa fungsi gelombang $\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ secara umum sebagai solusi Eq. (8)? Kita coba mulai dengan Eq. (5), namun dalam notasi Dirac (lihat Gasiorowicz Sect. 6-1).[2]

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

$$\rightarrow \left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)|\psi\rangle = V|\psi\rangle$$

$$\rightarrow |\psi\rangle = |\varphi\rangle + \left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)^{-1} V|\psi\rangle \,. \tag{11}$$

Sampai di sini kita cek apakah $|\psi\rangle$ di Eq. (11) benar:

$$\left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)|\psi\rangle = \left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)|\varphi\rangle + \left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)\left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)^{-1} V|\psi\rangle$$

$$= 0 + V|\psi\rangle$$

[2]Persamaan (5) merupakan persamaan differensial, yang solusinya dapat dicari menggunakan teknik fungsi Green (ingat kuliah Fisika Matematika). Solusi tersebut $\psi(\mathbf{r})$ dan ekivalen dengan Eq. (11).

$$= V|\psi\rangle\,.\ \checkmark \tag{12}$$

Kita lanjutkan Eq. (11):

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\psi\rangle &= \langle\mathbf{r}|\varphi\rangle + \langle\mathbf{r}|\left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)^{-1} V|\psi\rangle \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{p}'\ \langle\mathbf{r}|\left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right)^{-1} |\mathbf{p}'\rangle\langle\mathbf{p}'|V|\psi\rangle \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{p}'\ \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}'\rangle\left(E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2\mu}\right)^{-1} \langle\mathbf{p}'|V|\psi\rangle \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}''\int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{p}'\ \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}'\rangle\left(E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2\mu}\right)^{-1} \langle\mathbf{p}'|\mathbf{r}''\rangle\langle\mathbf{r}''|V|\mathbf{r}'\rangle\langle\mathbf{r}'|\psi\rangle \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}''\int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{p}'\ \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}'\rangle\left(E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2\mu}\right)^{-1} \langle\mathbf{p}'|\mathbf{r}''\rangle V(r')\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{p}'\ \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}'\rangle\left(E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2\mu}\right)^{-1} \langle\mathbf{p}'|\mathbf{r}'\rangle V(r')\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}'\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{p}'\left(E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2\mu}\right)^{-1} e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\hbar} V(r')\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + 2\mu\int d\mathbf{r}'\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{p}'\frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\hbar}}{(2\mu E - \mathbf{p}'^2)} V(r')\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + 2\mu\int d\mathbf{r}'\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{p}'\frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\hbar}}{(\mathbf{p}_0^2 - \mathbf{p}'^2)} V(r')\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
\to \psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(r')\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

dengan $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ adalah fungsi Green (Davydov Eqs. (96.1a), (96.3), (96.4), (95.7)):

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{p}'\frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\hbar}}{\left(\frac{\mathbf{p}_0^2}{\hbar^2} - \frac{\mathbf{p}'^2}{\hbar^2}\right)} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left\{\begin{array}{c} e^{ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar} \\ e^{-ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}\end{array}\right\} = G^{(\pm)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,, \tag{14}$$

yang memenuhi persamaan (Davydov Eq. (95.5)):[3]

$$\begin{aligned}
\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}\right)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{\hbar^2}{2\mu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
\to \left(\mathbf{p}_0^2 - \mathbf{p}^2\right)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \hbar^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

[3]Kita dapat cek Eq. (16) (atau Davydov Eq. (95.5)) dengan membandingkan ruas kanan Eq. (16) dan ruas kanan Eq. (8), lalu terapkan pada Eq. (13) tanpa tambahan suku pertama (suku pertama merupakan tambahan solusi persamaan differensial Eq. (8), yang disebut sebagai fungsi pelengkap (*complementary function*, ingat kuliah Fisika Matematika)):

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}) &= \frac{2\mu}{\hbar^2}\int d\mathbf{r}'' G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')V(r'')\psi(\mathbf{r}'') \to \text{ganti } \frac{2\mu}{\hbar^2}V(r'')\psi(\mathbf{r}'') \text{ dengan } \delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}') \\
\psi(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}'' G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}') \\
&= G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\rightarrow \left(\mathbf{p}_0^2 + \hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \hbar^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$
$$\rightarrow \left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\mathbf{p}_0^2}{\hbar^2}\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{16}$$

Persamaan (13) sesuai dengan Davydov Eqs. (95.5) - (95.6a).

Fungsi gelombang $\psi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ pada Eq. (13) menunjukkan bahwa secara umum pada proses hamburan terjadi superposisi gelombang awal / datang (*incident wave*) $\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ dan gelombang terhambur (suku ke dua), yang merambat ke luar (*outgoing*) menjauhi pusat hamburan (*scattering center*). Fungsi Green yang sesuai dengan gelombang terhambur ke luar tersebut adalah $G^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Dengan demikian, diperoleh fungsi gelombang hamburan $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ (Davydov Eq. (95.8)):

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\int d\mathbf{r}' G^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\ &= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}' \frac{e^{ip_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\hbar}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')\,,\end{aligned} \tag{17}$$

yang dikenal sebagai persamaan Lippmann-Schwinger.

- Anggap jangkauan interaksi adalah d, yang berarti $V(r)|_{r>d} = 0$. Dengan demikian, integral pada Eq. (17) secara efektif hanya dikerjakan untuk $0 \leqslant r' \leqslant d$. Pada keadaan akhir, sistem diamati ketika jarak antara proyektil terhambur dan target terpental sangat besar dibanding dengan jangkauan interaksi (dengan kata lain, sistem kembali berada pada keadaan bebas), yaitu $r \gg d$. Berarti, pada integral di Eq. (17) $r' \ll r$. Kita dapat lakukan 2 pendekatan berikut:[4]

$$\begin{aligned}\bullet\ p_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= p_o(r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{1/2} \\ &= p_o r\left(1 - 2\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2} \\ &\approx p_o r\left(1 - 2\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r}\right)^{1/2} \\ &\approx p_o r\left(1 - \hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \\ &\approx p_o r - p_o\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' \\ &\approx p_o r - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'\end{aligned} \tag{18}$$

$$\bullet\quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{1/2} \approx r\,. \tag{19}$$

Persamaan (17) menjadi:

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}' \frac{e^{i(p_o r - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}')/\hbar}}{r}V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}')$$

[4] Pada keadaan akhir sistem berada pada keadaan bebas dan gelombang terhambur merambat dengan momentum akhir $\mathbf{p}'$. Karena energi E tetap, $p' = |\mathbf{p}'| = p_0 = \sqrt{2\mu E}$. Jika gelombang terhambur dideteksi di posisi $\mathbf{r}$, dapat dibayangkan bahwa gelombang terhambur merambat dari pusat hamburan ke detektor, yang berarti dengan vektor arah rambat $\hat{\mathbf{r}}$, yang tidak lain adalah arah momentum akhir $\hat{\mathbf{p}}'$. Dengan demikian, momentum akhir $\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|\hat{\mathbf{p}}' = p_0\hat{\mathbf{r}}$.

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}\int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'/\hbar}V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
&= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}(2\pi\hbar)^3\int d\mathbf{r}'\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'/\hbar}V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
&= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) - \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
&= \varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) + A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}\,, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

dengan $A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0)$ disebut amplitudo hamburan:

$$
A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0) = -(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') = -(2\pi)^2\mu\hbar\left\langle\varphi_{\mathbf{p}'}\right| V \left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}\right\rangle\,. \qquad (21)
$$

Persamaan (20) menunjukkan bahwa pada jarak yang jauh dari pusat hamburan, gelombang terhambur (*scattered wave*, suku ke-2) berupa gelombang bebas sferis (*spherical free wave*) dengan amplitudo $A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0)/r$. Persamaan (20) sama dengan Davydov Eq. (95.9) dan Eq. (21) sama dengan Davydov Eqs. (95.10) - (95.11), kecuali konstanta normalisasi yang dipakai untuk fungsi gelombang $\psi^{(+)}$ dan φ. Dapat dicek bahwa $A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0)$ tidak bergantung pada konstanta normalisasi.[5]

Mengingat hamburan memenuhi sifat *rotational invariant*, kebergantungan amplitudo hamburan tidak pada besaran vektor, melainkan pada besaran skalar, yaitu:

$$
A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0) = A(p_0\hat{\mathbf{p}}', p_0\hat{\mathbf{p}}_0) = A(p_0, \hat{\mathbf{p}}'\cdot\hat{\mathbf{p}}_0) = A(p_0,\theta) = A_{p_0}(\theta)\,. \qquad (24)
$$

Jadi, amplitudo hamburan bergantung pada besar momentum p_0 dan sudut hambur $\theta = \hat{\mathbf{p}}'\cdot\hat{\mathbf{p}}_0$ (= sudut antara momentum akhir dan momentum awal).

- Penampang lintang hamburan dihitung dengan rumus yang sama seperti Eq. (2), hanya saja kini dihitung dalam kerangka acuan pusat massa. Untuk itu diperlukan *incident flux* J_{inc} dan *scattered flux* J_{sc}. J_{inc} dihitung dari $\varphi_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r})$ di Eq. (10) dan J_{sc} dari suku ke-2 Eq. (20):

$$
\mathbf{J}_{inc} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\varphi^*_{\mathbf{p}_0}\boldsymbol{\nabla}\varphi_{\mathbf{p}_0} - (\boldsymbol{\nabla}\varphi^*_{\mathbf{p}_0})\varphi_{\mathbf{p}_0}\right) \to J_{inc} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p_0}{\mu} \qquad (25)
$$

[5]Ambillah fungsi gelombang hamburan dan fungsi gelombang bebas dalam buku Davydov adalah $\psi^{(+)(D)}$ dan $\varphi^{(D)}$. Berarti:

$$
\psi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\psi^{(+)(D)} \quad \text{dan} \quad \varphi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\varphi^{(D)}\,. \qquad (22)
$$

Anggaplah amplitudo hamburan dalam buku Davydov adalah $A^{(D)}$. Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
A(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0) &= -(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\varphi^*_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
&= -(2\pi)^2\mu\hbar\int d\mathbf{r}'\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\varphi^{(D)*}_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\psi^{(+)(D)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
&= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}'\varphi^{(D)*}_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')V(r')\psi^{(+)(D)}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{r}') \\
&= A^{(D)}(\mathbf{p}',\mathbf{p}_0)\,. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_{sc}(\theta) &= \frac{\hbar}{2i\mu}|A_{p_0}(\theta)|^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{e^{-ip_o r/\hbar}}{r}\boldsymbol{\nabla}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r} - \left(\boldsymbol{\nabla}\frac{e^{-ip_o r/\hbar}}{r}\right)\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}\right) \\
\rightarrow J_{sc}(\theta) &= \frac{\hbar}{2i\mu}|A_{p_0}(\theta)|^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{e^{-ip_o r/\hbar}}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r} - \left(\frac{d}{dr}\frac{e^{-ip_o r/\hbar}}{r}\right)\frac{e^{ip_o r/\hbar}}{r}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}|A_{p_0}(\theta)|^2 \frac{p_0}{\mu r^2}\,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Penampang lintang differensial diperoleh sebagai:

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{sc}(\theta)\ r^2}{J_{inc}} = |A_{p_0}(\theta)|^2 \qquad (27)
$$

dan penampang lintang total:

$$
\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \int d\Omega\, |A_{p_0}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, |A_{p_0}(\theta)|^2\,. \qquad (28)
$$