Catatan Mekanika Kuantum 2
Atom Hidrogen Riil
Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 12

Catatan: Maksud **atom hidrogen** di sini adalah **atom seperti hidrogen**, yaitu atom yang tersusun dari satu elektron dan inti, yang memiliki Z proton.

Hamiltonian "dasar" atom hidrogen (Gasiorowicz Eq. (12-1), atau ingat kembali kuliah Mekanika Kuantum 1) diberikan sebagai berikut:

$$H_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\,. \tag{1}$$

- H_0 pada Eq. (1) bukan untuk elektron, bukan untuk inti, melainkan untuk atom hidrogen sebagai satu sistem, yang terdiri dari dua benda, yaitu sebuah elektron dan inti atom.
- Namun, mengingat inti sangat masif (berat) relatif dibandingkan dengan elektron, maka masih dapat diterima sebagai suatu pendekatan bahwa inti diam dan H_0 tersebut untuk elektron dalam atom hidrogen, sehingga $\mu = m_e$, $\mathbf{p}$ momentum elektron, dan $\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}$ energi kinetik nonrelativistik elektron:

$$H_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\,. \tag{2}$$

Dua faktor sebagai koreksi terhadap H_0 adalah:

1. efek relativistik: energi kinetik dihitung menurut kinematika relativistik,
2. efek spin elektron: momen magnetik intrinsik elektron berinteraksi dengan medan magnetik inti.

A. Efek relativistik

Energi kinetik relativistik elektron (Gasiorowicz Eq. (12-2), gunakan ekspansi binomial):

$$\begin{aligned} E_{\text{bergerak}} - E_{\text{diam}} &= \left((m_e c^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2\right)^{\frac{1}{2}} - m_e c^2 \\ &= m_e c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(m_e c)^2}\right)^{\frac{1}{2}} - m_e c^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq m_e c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2(m_e c)^2} - \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8(m_e c)^4}\right) - m_e c^2 \\
&\simeq \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8m_e^3 c^2} \,. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Ambillah energi kinetik relativistik elektron pada Eq. (3), maka diperoleh hamiltonian terkoreksi H:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8m_e^3 c^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\
&= H_0 + H_1 \,, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

dengan H_1 merupakan hamiltonian usikan atau perturbasi akibat efek relativistik (Gasiorowicz Eq. (12-3)):

$$
H_1 = -\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8m_e^3 c^2} = -\frac{1}{2m_e c^2}\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\right)^2 . \qquad (5)
$$

B. Efek spin elektron

Jika elektron diam terhadap inti, elektron hanya merasakan medan listrik inti $\mathbf{E}$. Namun, elektron bergerak relatif tehadap inti. Akibatnya, medan listrik inti yang dirasakan elektron berubah-ubah. Perubahan medan listrik menimbukan medan magnetik, sehingga elektron merasakan juga medan magnetik $\mathbf{B}$. Dapat juga dilihat seperti ini. Jika elektron bergerak relatif terhadap inti, inti juga bergerak relatif terhadap elektron. Inti memiliki muatan lisrik. Jika inti bergerak, berarti ada muatan listrik bergerak, ada arus listrik, sehingga timbul medan magnetik di sekitarnya, yang dirasakan oleh elektron. Medan magnetik yang dirasakan elektron yang bergerak relatif terhadap inti dengan kecepatan uniform $\mathbf{v}$ adalah (Gasiorowicz Eq. (12-4)):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= -\frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} \\
&= -\frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times (-\nabla\phi(r)) \qquad (\phi(r) = \text{ potensial listrik, hanya fungsi jarak } r) \\
&= \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}\frac{d\phi(r)}{dr} \\
&= \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{r}\frac{1}{r}\frac{d\phi(r)}{dr} \\
&= \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{r}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \\
&= -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \,. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Karena memiliki spin $\mathbf{S}$, elektron memiliki momen magnetik intrinsik $\boldsymbol{\mu}$:

$$
\boldsymbol{\mu} = -\frac{eg}{2m_e}\mathbf{S} = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S} \qquad (g = 2 = \text{ rasio giromagnetik elektron}) \,. \qquad (7)
$$

Momen magnetik elektron berinteraksi dengan medan magnetik inti, memberikan energi potensial:

$$
-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e c^2}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\mathbf{S}\cdot(m_e\mathbf{v}\times\mathbf{r}) \\
&= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{r}) \\
&= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) \\
&= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\,. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Koreksi relativistik (lihat Gasiorowicz setelah Eq. (12-6)) mereduksi energi potential tersebut menjadi separuhnya:

$$\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\,. \qquad (9)$$

Interaksi spin elektron dan medan magnetik inti pada Eq. (9) ditentukan oleh kopling spin dan momentum angular orbital (*spin-orbit coupling*), yang ditunjukkan oleh operator $\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$. Berarti, dengan menyertakan spin elektron pada perhitungan atom hidrogen, kita berhadapan dengan momentum angular total $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$.

Hamiltonian terkoreksi H kini menjadi:

$$H = H_0 + H_1 + H_2\,, \qquad (10)$$

dengan H_2 merupakan hamiltonian usikan akibat efek spin elektron (Gasiorowicz Eq. (12-7)):

$$H_2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}\,. \qquad (11)$$

Bentuk potential / interaksi seperti H_2 dikenal juga dengan *spin-orbit potential / interaction.*

C. Perhitungan perturbasi (hanya orde 1)

C.1. Perturbasi akibat efek relativistik

Perhatikan H_0 di Eq (2) dan H_1 di Eq (5):

- H_0 dan tiap suku di dalamnya memiliki keadaan eigen bersama (*simultaneous eigen-states*), yaitu $|\phi_{nlm}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
H_0|\phi_{nlm}\rangle &= \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)|\phi_{nlm}\rangle \\
&= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}|\phi_{nlm}\rangle - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}|\phi_{nlm}\rangle \\
&= \alpha|\phi_{nlm}\rangle + \beta|\phi_{nlm}\rangle \\
&= (\alpha+\beta)|\phi_{nlm}\rangle \\
&= E_n^{(0)}|\phi_{nlm}\rangle\,. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

- Suku pertama H_0, yaitu $\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}$ (atau sebetulnya cukup kita lihat $\hat{\mathbf{p}}^2$, karena sisanya adalah konstanta) membentuk H_1 seperti pada Eq. (5).

- Dengan demikian, $|\phi_{nlm}\rangle$ juga merupakan keadaan eigen H_1 (sehingga $[H_0, H_1] = 0$, lihat Gasiorowicz Eqs. (5-33) - (5-37)):

$$H_1|\phi_{nlm}\rangle = -\frac{1}{2m_e c^2}\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\right)^2|\phi_{nlm}\rangle = -\frac{\alpha^2}{2m_e c^2}|\phi_{nlm}\rangle\,. \tag{13}$$

- Dalam basis $|\phi_{nlm}\rangle$, baik H_0 maupun H_1 merupakan matriks diagonal (lihat penjelasan Gasiorowicz yang menyertai Eqs. (11-25) - (11-27)):

$$\langle\phi_{n'l'm'}|H_0|\phi_{nlm}\rangle = E_n^{(0)}\delta_{n'n}\delta_{l'l}\delta_{m'm} \tag{14}$$

$$\langle\phi_{n'l'm'}|H_1|\phi_{nlm}\rangle = -\frac{\alpha^2}{2m_e c^2}\delta_{n'n}\delta_{l'l}\delta_{m'm} \tag{15}$$

- Dengan demikian, H_1 tidak menyebabkan keadaan atom hidrogen berubah, melainkan tetap $|\phi_{nlm}\rangle$.

- H_1 menyebabkan energi $E_n^{(0)}$ berubah menjadi $E_n = E_n^{(0)} + \Delta E_1$, dengan (Gasiorowicz Eqs. (12-8) - (12-9)):

$$\begin{aligned}
\Delta E_1 &= \langle\phi_{nlm}|H_1|\phi_{nlm}\rangle \\
&= -\frac{1}{2m_e c^2}\langle\phi_{nlm}|\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\right)^2|\phi_{nlm}\rangle \\
&= -\frac{1}{2m_e c^2}\langle\phi_{nlm}|\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\right)\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\right)|\phi_{nlm}\rangle \\
&= -\frac{1}{2m_e c^2}\langle\phi_{nlm}|\left(H_0 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\left(H_0 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)|\phi_{nlm}\rangle \\
&= -\frac{1}{2m_e c^2}\langle\phi_{nlm}|\left(H_0^2 + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r}H_0 + \frac{Z^2e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^2}\right)|\phi_{nlm}\rangle \\
&= -\frac{1}{2m_e c^2}\left(\langle\phi_{nlm}|H_0^2|\phi_{nlm}\rangle + \langle\phi_{nlm}|\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r}H_0|\phi_{nlm}\rangle + \langle\phi_{nlm}|\frac{Z^2e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^2}|\phi_{nlm}\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{2m_e c^2}\left(\left(E_n^{(0)}\right)^2 + \frac{Ze^2E_n^{(0)}}{2\pi\epsilon_0}\langle\phi_{nlm}|\frac{1}{r}|\phi_{nlm}\rangle + \frac{Z^2e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2}\langle\phi_{nlm}|\frac{1}{r^2}|\phi_{nlm}\rangle\right)\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Suku kedua dan ketiga pada Eq. (16) dapat dilihat di Gasiorowicz Eq. (8-52). Hasil Eq. (16) adalah (Gasiorowicz Eq. (12-9)):

$$\Delta E_1 = -\frac{1}{2}m_e c^2\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}\left[\frac{2}{(2l+1)} - \frac{3}{4n}\right] = E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\left[\frac{2}{(2l+1)} - \frac{3}{4n}\right]\,. \tag{17}$$

- H_1 menghilangkan sebagian degenerasi, yaitu dapat membedakan keadaan dengan l berbeda (lihat Gasiorowicz Eq. (12-9)). Level energi E_n pecah menjadi n sublevel untuk $l = 0, 1, ..., n-1$.

C.2. Perturbasi akibat efek spin elektron

H_2 berupa suatu konstanta dikalikan dengan operator spin-orbit $\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}$. Kita fokus dulu pada operator $\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}$.

- Sebagai basis, kita tambahkan keadaan spin elektron $|\frac{1}{2}\lambda\rangle$ pada keadaan $|\phi_{nlm}\rangle$, menjadi keadaan $|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle$.

- $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ dapat diurai menjadi:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}} &= \hat{S}_x\hat{L}_x + \hat{S}_y\hat{L}_y + \hat{S}_z\hat{L}_z \\
&= \frac{1}{4}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) - \frac{1}{4}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)(\hat{L}_+ - \hat{L}_-) + \hat{S}_z\hat{L}_z \\
&= \frac{1}{4}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) - \frac{1}{4}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)(\hat{L}_+ - \hat{L}_-) + \hat{S}_z\hat{L}_z \,. \qquad (18)
\end{aligned}$$

- Jelas, bahwa matriks $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ dalam basis $|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle$ tidak diagonal, mengingat:

$$\hat{S}_\pm|\frac{1}{2}\lambda\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \lambda(\lambda\pm 1)}\,|\frac{1}{2},\lambda\pm 1\rangle = \hbar\sqrt{\frac{3}{4} - \lambda(\lambda\pm 1)}\,|\frac{1}{2},\lambda\pm 1\rangle \qquad (19)$$

$$\hat{L}_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|l, m\pm 1\rangle \,. \qquad (20)$$

Lebih detil, Eq. (18) menunjukkan bahwa operator $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ hanya mengubah komponen z dari $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{L}$, yaitu λ dan m; operator $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ tidak mengubah n dan l. Dengan demikian, matriks $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ diagonal dalam n dan l, namun tidak diagonal dalam λ dan m.

- Dengan demikian, kita harus selesaikan problem nilai eigen (lihat Gasiorowicz Eq. (11-24), ingat bahwa ada faktor α_i yang hilang di persamaan itu; atau lihat Eq. (53) catatan Teori Perturbasi Tak Bergantung Waktu) untuk mendapatkan keadaan dan nilai eigen baru setelah sistem diusik H_2.

- Sebagai alternatif, tentu saja lebih mudah jika matriks $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ dinyatakan dalam basis baru yang membuatnya diagonal. Basis baru itu menjadi keadaan eigen baru setelah sistem diusik H_2 dan elemen diagonal $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ menjadi nilai eigennya. Sesuai postulat ekspansi, basis baru tersebut merupakan kombinasi linier dari basis lama:

$$|\text{ basis baru }\rangle = \sum_{m\lambda} C_{nlm\lambda}|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle \,. \qquad (21)$$

Ekspansi pada Eq. (21) cukup hanya terhadap paling banyak (*at most*) m dan λ, mengingat matriks $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ tidak diagonal hanya dalam m dan λ. Pada faktanya, kita akan lihat bahwa dapat kita pilih basis baru, yang ekspansinya dalam basis lama hanya terhadap salah satu, m atau λ.

- Jika kita jumlahkan spin $\mathbf{S}$ dan momentum anguar orbital $\mathbf{L}$ untuk mendapatkan momentum angular total $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \qquad (22)$$

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} \qquad (23)$$

$$\to \mathbf{S}\cdot\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)\,, \qquad (24)$$

maka kita bisa pilih keadaan eigen bersama $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{\mathbf{L}}^2$, dan $\hat{\mathbf{S}}^2$, yaitu $|\phi_{njm_jl}\rangle$ sebagai basis baru, yang membuat matriks $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ diagonal. Keadaan $|\phi_{njm_jl}\rangle$ berhubungan dengan keadaan $|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle$ menurut:

$$|\phi_{njm_jl}\rangle = \sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle\,, \tag{25}$$

dengan $C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)$ koefisien Clebsch-Gordan.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2)|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{J}}^2|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)\hat{\mathbf{L}}^2|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)|\phi_{nlm}\rangle\hat{\mathbf{S}}^2|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar^2 j(j+1)|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)\hbar^2 l(l+1)|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)|\phi_{nlm}\rangle\hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)|\phi_{njm_jl}\rangle\,,
\end{aligned} \tag{26}$$

Persamaan (26) merupakan persamaan nilai eigen, yang berarti bahwa matriks $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ diagonal dalam basis $|\phi_{njm_jl}\rangle$.

- Nilai-nilai j, keadaan $|\phi_{njm_jl}\rangle$, dan $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle$ adalah:

$$l = 0 \;:\; j = \frac{1}{2} \tag{27}$$

$$|\phi_{n\frac{1}{2}m_j0}\rangle = |\phi_{n00}\rangle|\frac{1}{2}m_j\rangle \tag{28}$$

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle = 0 \tag{29}$$

$$l > 0 \;:\; j = l \pm \frac{1}{2} \tag{30}$$

$$|\phi_{n(l\pm\frac{1}{2})m_jl}\rangle = \sum_m C\left(l\frac{1}{2}\left(l \pm \frac{1}{2}\right); m(m_j - m)m_j\right)|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \tag{31}$$

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left\{\begin{array}{l} l \\ -(l+1) \end{array}\right\}|\phi_{njm_jl}\rangle\,. \tag{32}$$

Dapat dilihat $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle$ tidak bergantung pada komponen z dari $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{L}$, yaitu λ dan m, melainkan hanya pada l dan j.

Untuk seterusnya basis $|\phi_{njm_jl}\rangle$ tetap dipakai. Dalam basis tersebut baik H_0 maupun H_1 tetap diagonal (lihat lagi Eqs. (12) - (13)), karena $|\phi_{njm_jl}\rangle$ juga keadaan eigen H_0 dan H_1:

$$
\begin{aligned}
(H_0 + H_1)|\phi_{njm_jl}\rangle &= \sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)(H_0 + H_1)|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&= \sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j - m)m_j\right)\left(E_n^{(0)} - \frac{\alpha^2}{2m_ec^2}\right)|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&= \left(E_n^{(0)} - \frac{\alpha^2}{2m_ec^2}\right)|\phi_{njm_jl}\rangle\,, \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Kini, kita ambil H_2 seutuhnya dan lihat perubahan keadaan serta energi yang diakibatkannya. Untuk $l = 0$ jelas H_2 tidak menimbulkan perubahan (lihat Eq. (29)), karena itu di bawah ini kita ambil $l > 0$.

- Perubahan energi ΔE_2 akibat H_2 adalah (lihat juga Gasiorowicz Eq. (12-15)):

$$
\begin{aligned}
\Delta E_2 &= \langle\phi_{njm_jl}|H_2|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \langle\phi_{njm_jl}|\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2c^2}\langle\phi_{njm_jl}|\frac{1}{r^3}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2c^2}\langle\phi_{njm_jl}|\frac{1}{r^3}|\phi_{njm_jl}\rangle\begin{cases}\frac{\hbar^2}{2}l \\ -\frac{\hbar^2}{2}(l+1)\end{cases} \\
&= \frac{Z^4e^2\hbar^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2c^2a_0^3n^3l(l+1)(2l+1)}\begin{cases}l \\ -(l+1)\end{cases} \\
&= \frac{m_ec^2(Z\alpha)^4}{2n^3l(2l+1)(l+1)}\begin{cases}l \\ -(l+1)\end{cases} \\
&= -E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\frac{1}{l(2l+1)(l+1)}\begin{cases}l \\ -(l+1)\end{cases}\quad. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

- Kecuali untuk $l = 0$, H_2 membuat garis spektrum untuk tiap nilai l pecah menjadi dua.
- H_2 juga menyebabkan keadaan eigen atom hidrogen berubah dari $|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle$ menjadi kombinasi linier dari $|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle$, yaitu $|\phi_{njm_jl}\rangle$, seperti ditunjukkan oleh Eq. (31).
- H_2 membuat komponen z dari spin dan momentum angular orbital tidak lagi kekal (*conserved*), seperti ditunjukkan oleh Eqs. (18), (19), dan (20). Besaran momentum angular yang kekal adalah momentum angular total j dan m_j serta l dan $s = \frac{1}{2}$.

D. Rangkuman, struktur halus (*fine structure*) atom hidrogen

Koreksi efek relativistik H_1 dan efek spin elektron (efek spin-orbit) H_2 menyebabkan energi atom hidrogen berubah menjadi:

$$
\begin{aligned}
E_n &= E_n^{(0)} + \Delta E_1 + \Delta E_2 \\
&= E_n^{(0)} + E_n^{(0)} \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left[\frac{2}{(2l+1)} - \frac{3}{4n} \right] - E_n^{(0)} \frac{(Z\alpha)^2}{n} \frac{1}{l(2l+1)(l+1)} \begin{cases} l \\ -(l+1) \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} + E_n^{(0)} \frac{(Z\alpha)^2}{n} \begin{cases} \left[\frac{1}{(l+1)} - \frac{3}{4n} \right] \\ \left[\frac{1}{l} - \frac{3}{4n} \right] \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} + E_n^{(0)} \frac{(Z\alpha)^2}{n} \begin{cases} \left[\frac{1}{(l+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n} \right] \\ \left[\frac{1}{(l-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n} \right] \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} + E_n^{(0)} \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left[\frac{1}{(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n} \right] \\
&= E_n^{(0)} \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left[\frac{1}{(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n} \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{35}
$$

Tingkat energi atom hidrogen, seperti ditunjukkan oleh Eq. (35), menjadi lebih halus (satu tingkat pecah menjadi beberapa tingkat). Ini disebut struktur halus (*fine structure*) atom hidrogen.

E. Efek Zeeman dan efek Zeeman anomalis

Apa yang terjadi apabila atom hidrogen diusik, yaitu ditempatkan dalam medan magnetik lemah $\mathbf{B}$?

- Ambillah sebuah partikel bermassa m dan bermuatan q. Jika partikel itu bergerak dalam suatu medan magnetik (lemah maupun kuat) $\mathbf{B}$, interaksinya dengan medan mangetik tersebut (interaksi antara momen magnetik $\boldsymbol{\mu}$ partikel dan medan magnetik) menghasilkan (energi) potential yang bergantung pada momentum angularnya. Jika partikel tersebut tidak memiliki spin (*spinless*, spinnya sama dengan nol), momentum angularnya hanya momentum angular orbital, sehingga potensialnya adalah:

$$H_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{q}{2m} \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{B} . \tag{36}$$

  Jika partikel tersebut memiliki spin, momentum angularnya terdiri dari momentum angular orbital dan spin, sehingga ada momen magnetik orbital $\boldsymbol{\mu}_L$ dan momen magnetik intrinsik $\boldsymbol{\mu}_S$, yang menghasilkan momen magnetik total $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S = \frac{q}{2m} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) , \tag{37}$$

  sehingga potensialnya adalah:

$$H_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{q}{2m} (\hat{\mathbf{L}} + g\hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{B} , \tag{38}$$

dengan g rasio giromagnetik. Perhatikan Eq. (37) bahwa momen magnetik total $\boldsymbol{\mu}$ tidak sebanding dengan momentum angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, dikarenakan rasio giromagnetik g.

- Mengingat tidak ada kerangka acuan mutlak di alam, orang bebas memilih arah sumbu z. Pada kasus ini, supaya mudah biasanya orang pilih arah sumbu z sama dengan arah medan magnetik $\mathbf{B}$, sehingga $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ dan Eq. (38) menjadi:

$$H_B = -\frac{q}{2m}(\hat{L}_z + g\hat{S}_z)B\,. \tag{39}$$

- Untuk kasus atom hidrogen berada dalam medan magnetik lemah $\mathbf{B}$, secara perturbatif kita ambil Eq. (39) untuk elektron dalam atom hidrogen, sehingga $m = m_e$, $q = -e$, $g = 2$, dan potensial usikan adalah:

$$H_B = \frac{e}{2m_e}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)B\,. \tag{40}$$

- Tanpa memperhitungkan spin, H_B pada Eq. (40) menjadi:

$$H_B = \frac{eB}{2m_e}\hat{L}_z \tag{41}$$

dan nilainya sesuai teori perturbasi orde satu dapat dicari dengan mudah dalam basis $|\phi_{nlm}\rangle$, yaitu:

$$\begin{aligned}\langle\phi_{nlm}|H_B|\phi_{nlm}\rangle &= \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{nlm}|\hat{L}_z|\phi_{nlm}\rangle \\ &= \frac{eB\hbar}{2m_e}m\,.\end{aligned} \tag{42}$$

Pergeseran energi pada Eq. (42) dikenal sebagai efek Zeeman. Pada efek ini untuk tiap nilai l terjadi pemecahan (*splitting*) tingkat energi menjadi $2l + 1$ tingkat, sesuai jumlah nilai m yang mungkin ($m = -l, ..., l$).

- Untuk selanjutnya, spin kita perhitungkan dan basis yang kita pakai adalah $|\phi_{njm_jl}\rangle$. Hamiltonian atom hidrogen menjadi:

$$H = H_0 + H_B\,, \tag{43}$$

dengan H_B sesuai Eq. (40). Untuk atom hidrogen riil efek relativistik dan efek spin-orbit dapat kita masukkan sebagai bagian dari H_0:

$$H_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{1}{2m_e c^2}\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\right)^2 + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}\,. \tag{44}$$

Namun, untuk kemudahan, kita abaikan efek relativistik, dengan kata lain, kita anggap efek relativistik kurang berarti (kecil) dibandingkan usikan akibat medan magnetik $\mathbf{B}$, sehingga:

$$H_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}} \tag{45}$$

dan:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 m_e^2 c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}} + \frac{e}{2m_e}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)B\,. \tag{46}$$

- Nilai H_0 adalah (lihat Eqs. (33) dan (34)):

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_{njm_jl}|H_0|\phi_{njm_jl}\rangle &= E_n^{(0)} - E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\frac{1}{l(2l+1)(l+1)}\begin{cases} l \\ -(l+1) \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} - E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\frac{1}{(2l+1)}\begin{cases} \frac{1}{l+1} \\ -\frac{1}{l} \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} - E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\frac{1}{(2l+1)}\begin{cases} \frac{1}{l+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{l-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} - E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\frac{1}{(2l+1)}\begin{cases} \frac{1}{j+\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \\
&= E_n^{(0)} \mp E_n^{(0)}\frac{(Z\alpha)^2}{n}\frac{1}{(2l+1)(j+\frac{1}{2})} \\
&= E_n^{(0)}\left[1 \mp \frac{(Z\alpha)^2}{2n(l+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}\right] . \qquad (47)
\end{aligned}
$$

- Nilai H_B menurut teori perturbasi orde 1 adalah:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_{njm_jl}|H_B|\phi_{njm_jl}\rangle &= \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{njm_jl}|(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{njm_jl}|(\hat{L}_z + \hat{S}_z + \hat{S}_z)|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{njm_jl}|(\hat{J}_z + \hat{S}_z)|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{njm_jl}|\hat{J}_z|\phi_{njm_jl}\rangle + \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{eB}{2m_e}\hbar m_j + \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{eB}{2m_e}\Big(\hbar m_j + \langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle\Big) \qquad (48) \\
\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle &= ?\,. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

- Bisa saja $\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle$ dihitung sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle &= \sum_{m'm} C\left(l\frac{1}{2}j; m'(m_j-m')m_j\right) C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) \\
&\quad \times \langle\phi_{nlm'}|\langle\frac{1}{2}, m_j-m'|\hat{S}_z|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}, m_j-m\rangle \\
&= \sum_{m'm} C\left(l\frac{1}{2}j; m'(m_j-m')m_j\right) C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) \\
&\quad \times \langle\phi_{nlm'}|\phi_{nlm}\rangle\langle\frac{1}{2}, m_j-m'|\hat{S}_z|\frac{1}{2}, m_j-m\rangle \\
&= \sum_{m'm} C\left(l\frac{1}{2}j; m'(m_j-m')m_j\right) C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) \\
&\quad \times \delta_{m'm}\langle\frac{1}{2}, m_j-m'|\hat{S}_z|\frac{1}{2}, m_j-m\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) \\
&\quad \times \langle\frac{1}{2}, m_j - m|\hat{S}_z|\frac{1}{2}, m_j - m\rangle \\
&= \hbar\sum_m (m_j-m) C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) C\left(l\frac{1}{2}j; m(m_j-m)m_j\right) \\
&= \ldots .
\end{aligned} \tag{50}
$$

→ Adakah cara lain yang lebih mudah?

- Cara lain:

  Invariansi rotasional (*rotational invariance*) menuntut momentum angular total **J** tetap. Karena **J** vektor, ini berarti baik arahnya maupun nilainya j tetap (karena itu, j menjadi *good quantum number*). Dengan kata lain, **J** merupakan *constant of motion.* Dalam hal ini, momentum angular orbital **L** dan spin **S** bukan *constant of motion.* Nilai spin s memang tetap (s menjadi *good quantum number*), namun arahnya tidak tetap (ditunjukkan oleh nilai λ tidak tetap). Nilai momentum angular orbital l dan arahnya (diwakili oleh nilai m) kedua-duanya tidak tetap.

  Ambillah sembarang keadaan $|\phi_{njm_jl}\rangle$. Pada keadaan tersebut, atom hidrogen memiliki spin **S** dengan panjang $s\hbar = \frac{1}{2}\hbar$, momentum angular orbital **L** dengan panjang $l\hbar$, dan momentum angular total $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$ dengan panjang $j\hbar$. Arah **S** dan **L** bervariasi, namun selalu menghasilkan **J** yang sama. Tiap variasi arah **S** dan **L** itu memiliki kemungkinan yang sama, karena tidak ada alasan bahwa suatu arah lebih dominan dari yang lain. Ingat bahwa dalam perhitungan mekanika kuantum semua yang mungkin diperhitungkan. Memperhitungkan semua variasi arah **S** dan **L** sama dengan menganggap **S** dan **L** secara bersamaan berpresesi (ingat kembali gerak presesi) di sekitar **J** dengan sudut antara keduanya selalu tetap (lihat Gasiorowicz Fig. 12-2). Pada presesi tersebut, komponen **S** yang tegak lurus terhadap **J** selalu berubah-ubah dan, karena itu, secara rata-rata nilainya nol. Hal yang sama berlaku pada komponen **L** yang tegak lurus terhadap **J**. Sebaliknya, baik komponen **S** maupun komponen **L** pada arah **J** tetap. Dengan demikian, dalam perhitungan secara rata-rata[1] kita dapat mengganti **S** maupun **L** masing-masing dengan komponennya pada arah **J**:

$$
\mathbf{S} \;\rightarrow\; \text{komponen } \mathbf{S} \text{ pada arah } \mathbf{J} \tag{51}
$$

$$
\mathbf{L} \;\rightarrow\; \text{komponen } \mathbf{L} \text{ pada arah } \mathbf{J}\,. \tag{52}
$$

  Untuk menghitung $\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle$, kita hanya perlu mengevaluasi komponen **S** pada arah **J**. Komponen **S** pada arah **J** adalah (arahnya sama dengan arah **J** dan besarnya

[1]Perhitungan besaran fisika memang bersifat ”secara rata-rata”, mengingat di sisi eksperimen perhitungan besaran fisika berarti pengukuran besaran fisika dan hasil pengukuran merupakan nilai rata-rata.

sama dengan proyeksi $\mathbf{S}$ pada arah $\mathbf{J}$, arah $\mathbf{J}$ sama dengan $\mathbf{J}/|\mathbf{J}|$):

$$\left(\mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|}\right)\frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|}=\frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})}{\mathbf{J}^2}\mathbf{J}\to\left(\hat{\mathbf{S}}\cdot\frac{\hat{\mathbf{J}}}{|\hat{\mathbf{J}}|}\right)\frac{\hat{\mathbf{J}}}{|\hat{\mathbf{J}}|}=\frac{(\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{J}})}{\hat{\mathbf{J}}^2}\hat{\mathbf{J}}=\frac{(\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{J}})}{\hbar^2 j(j+1)}\hat{\mathbf{J}}\,. \tag{53}$$

Karena $\mathbf{J}$ tetap, maka $\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}$ juga tetap dan dapat dihitung mengingat $\mathbf{L}=\mathbf{J}-\mathbf{S}$:

$$\mathbf{L}=\mathbf{J}-\mathbf{S} \tag{54}$$

$$\mathbf{L}^2=(\mathbf{J}-\mathbf{S})^2=\mathbf{J}^2+\mathbf{S}^2-2\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} \tag{55}$$

$$\to\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}=\frac{1}{2}(\mathbf{J}^2+\mathbf{S}^2-\mathbf{L}^2)\,, \tag{56}$$

Nilai $\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}$ dapat dihitung dengan mudah menggunakan basis $|\phi_{njm_jl}\rangle$ (lihat Eq. (26)):

$$\begin{aligned}\langle\phi_{njm_jl}|\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{J}}|\phi_{njm_jl}\rangle&=\frac{1}{2}\langle\phi_{njm_jl}|(\hat{\mathbf{J}}^2+\hat{\mathbf{S}}^2-\hat{\mathbf{L}}^2)|\phi_{njm_jl}\rangle\\&=\frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1)+\frac{3}{4}-l(l+1)\right]\,.\end{aligned} \tag{57}$$

Nilai $\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle$ diperoleh dengan mengganti $\hat{S}_z$ dengan komponen z dari operator di Eq. (53) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle\phi_{njm_jl}|\hat{S}_z|\phi_{njm_jl}\rangle&=\langle\phi_{njm_jl}|\frac{(\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{J}})}{\hbar^2 j(j+1)}\hat{J}_z|\phi_{njm_jl}\rangle\\&=\frac{1}{\hbar^2 j(j+1)}\langle\phi_{njm_jl}|(\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{J}})\hat{J}_z|\phi_{njm_jl}\rangle\\&=\frac{\hbar m_j}{\hbar^2 j(j+1)}\langle\phi_{njm_jl}|(\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{J}})|\phi_{njm_jl}\rangle\\&=\frac{\hbar m_j}{\hbar^2 j(j+1)}\frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1)-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]\\&=\frac{\hbar m_j}{2j(j+1)}\left[j(j+1)-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]\,.\end{aligned} \tag{58}$$

- Akhirnya, diperoleh nilai H_B menurut teori perturbasi orde 1 (lihat Eq. (48)):

$$\begin{aligned}\langle\phi_{njm_jl}|H_B|\phi_{njm_jl}\rangle&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left\{1+\frac{1}{2j(j+1)}\left[j(j+1)-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]\right\}\\&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2j(j+1)}\left[-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]\right\}\\&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2j(j+1)}\left(l+\frac{3}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2(l\pm\frac{1}{2})(l\pm\frac{1}{2}+1)}\left(l+\frac{3}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2(l+\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}(l-\frac{1}{2})\\(l+\frac{3}{2})\end{pmatrix}\right]\\&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2(l+\frac{1}{2})}\left(l+\frac{1}{2}\mp1\right)\right]\\&=\frac{eB\hbar}{2m_e}m_j\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{1}{(l+\frac{1}{2})}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{eB\hbar}{2m_e} m_j \left[1 \pm \frac{1}{(2l+1)} \right] . \tag{59}$$

Pergeseran energi pada Eq. (59) dikenal sebagai efek Zeeman anomalis.

- Apabila medan magnetik **B** cukup kuat, sehingga interaksi spin-orbit dapat diabaikan, maka kita tak perlu perhitungkan penjumlahan momentum angular orbital **L** dan spin **S**, mengingat suku spin-orbit muncul akibat penjumlahan keduanya (lihat Eqs. (22) - (24)). Karena itu, kita biarkan **L** dan **S** tidak dijumlahkan dan kita pakai basis $|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle$ untuk menghitung pergeseran energi akibat H_B (lihat perbedaannya dari Eq. (48)):

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{2}\lambda|\langle\phi_{nlm}|H_B|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle &= \frac{eB}{2m_e}\langle\frac{1}{2}\lambda|\langle\phi_{nlm}|(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)|\phi_{nlm}\rangle|\frac{1}{2}\lambda\rangle \\ &= \frac{eB}{2m_e}\langle\phi_{nlm}|\hat{L}_z|\phi_{nlm}\rangle + \frac{eB}{m_e}\langle\frac{1}{2}\lambda|\hat{S}_z|\frac{1}{2}\lambda\rangle \\ &= \frac{eB\hbar}{2m_e}m + \frac{eB\hbar}{m_e}\lambda \\ &= \frac{eB\hbar}{2m_e}(m + 2\lambda) . \end{aligned} \tag{60}$$

Pergeseran energi pada Eq. (60) merupakan efek Zeeman anomalis untuk medan magnetik yang kuat.

F. Struktur hiperhalus (*hyperfine structure*)

Telah kita lihat bahwa medan magnetik luar pada atom hidrogen menghasilkan efek Zeeman dan efek Zeeman anomalis, apabila spin elektron diperhitungkan. Sesungguhnya, sumber medan magnetik bukan hanya dari luar, melainkan ada juga yang dari dalam. Medan magnetik internal ini ditimbulkan oleh momen magnetik inti, yang disebabkan oleh momentum angular intrinsik inti, yaitu spin inti.[2] Medan magnetik internal ini tentu selalu hadir dan karenanya menimbulkan efek Zeeman permanen, menghasilkan tingkat energi yang lebih halus (*hyperfine structure*).

- Inti bermuatan Ze dan bermassa M_N. Spin inti **I** menimbulkan momen magnetik inti **M**:[3]

$$\mathbf{M} = \frac{Ze}{2M_N} g_N \mathbf{I} . \tag{61}$$

dengan g_N rasio giromagnetik inti.

[2]Catatan: Sesungguhnya, spin inti bukanlah spin dalam arti yang sesungguhnya. Karena, inti atom merupakan benda komposit, yaitu tersusun dari beberapa partikel (nukleon), kecuali inti atom hidrogen, yang tidak lain adalah proton. Jadi, spin inti sesungguhnya momentum angular total, yaitu jumlah dari spin dan momentum angular orbital semua nukleon penyusunnya.

[3]Lihat kembali Eq. (37), bahwa momen mangetik tidak sebanding dengan momentum angular total. Mengingat spin inti **I** sesungguhnya momentum angular total inti, momen magnetik inti **M** sebenarnya tidaklah sebanding dengan **I**. Dengan demikian, momen magnetik inti **M** di sini dapat kita anggap sebagai komponen momen magnetik inti yang searah dengan spin inti **I**.

- Momen magnetik inti $\mathbf{M}$ menimbulkan medan magnetik $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ di sekitarnya (lihat Gasiorowicz Eq. (12-28)):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{Zeg_N}{2M_N}\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{I}) - r^2\mathbf{I}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\mathbf{I}\delta(\mathbf{r})\right) . \tag{62}$$

  Di sini inti dianggap berada di pusat koordinat ($r = 0$) dan ini dapat diterima, mengingat inti jauh lebih masif dari elektron, sehingga pusat massa berada di inti.

- Medan magnetik di Eq. (62) berinteraksi dengan momen magnetik elektron dan memberikan potensial usikan $H_{hf}(\mathbf{r})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H_{hf}(\mathbf{r}) =& -\boldsymbol{\mu_e}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \\
=& \frac{e}{2m_e}(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}})\cdot\frac{Zeg_N}{2M_N}\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}}) - r^2\hat{\mathbf{I}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r})\right) \\
=& \frac{e}{2m_e}(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}})\cdot\frac{Zeg_N}{2M_N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}}) - r^2\hat{\mathbf{I}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r})\right) \quad (\text{ingat: } c = (\mu_0\epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}) \\
=& \frac{e}{2m_e}\frac{Zeg_N}{2M_N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}})\cdot\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}}) - r^2\hat{\mathbf{I}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r})\right) \\
=& \frac{Z\alpha\hbar}{4M_N m_e c}g_N(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}})\cdot\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}}) - r^2\hat{\mathbf{I}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r})\right) .
\end{aligned} \tag{63}$$

  $H_{hf}(\mathbf{r})$ di Eq. (63) juga dapat dilihat sebagai interaksi antara spin inti $\mathbf{I}$ dan momentum angular orbital $\mathbf{L}$ dan juga spin elektron $\mathbf{S}$.

  $H_{hf}(\mathbf{r})$ di Eq. (63) sesungguhnya merupakan elemen matriks H_{hf} dalam ruang / representasi $\mathbf{r}$, seperti ditunjukkan oleh ekspansi operator H_{hf} dalam basis $|\mathbf{r}\rangle$ berikut ini (ingat kembali tentang representasi dan basis):

$$\begin{aligned}
H_{hf} &= 1\ H_{hf}\ 1 \\
&= \int d\mathbf{r}'\ |\mathbf{r}'\rangle\langle\mathbf{r}'|\ H_{hf} \int d\mathbf{r}\ |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| \\
&= \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}\ |\mathbf{r}'\rangle\langle\mathbf{r}'|H_{hf}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| \\
&= \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}\ |\mathbf{r}'\rangle H_{hf}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\langle\mathbf{r}| \\
&= \int d\mathbf{r}\ |\mathbf{r}\rangle H_{hf}(\mathbf{r})\langle\mathbf{r}| .
\end{aligned} \tag{64}$$

- Sebagai contoh, ambil kasus sederhana, yaitu untuk $l = 0$. Berarti, suku yang mengandung $\hat{\mathbf{L}}$ didrop, menyisakan hanya interaksi antara spin inti dan spin elektron:

$$\begin{aligned}
H_{hf}(\mathbf{r}) &= \frac{Z\alpha\hbar}{2M_N m_e c}g_N\hat{\mathbf{S}}\cdot\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}}) - r^2\hat{\mathbf{I}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r})\right) \\
&= \frac{Z\alpha\hbar}{2M_N m_e c}g_N\left(\frac{3(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{S}})(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}}) - r^2(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})}{r^5} + \frac{8\pi}{3}(\hat{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{S})\delta(\mathbf{r})\right) .
\end{aligned} \tag{65}$$

Karena tidak ada momentum angular orbital $\mathbf{L}$ yang dijumlahkan dengan spin, ruang $\mathbf{r}$ tidak terkopel dengan ruang spin $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{I}$, melainkan berdiri sendiri-sendiri. Dengan demikian, untuk menghitung nilai $H_{hf}(\mathbf{r})$ dapat dilakukan secara terpisah, mula-mula di ruang $\mathbf{r}$ (hanya mengenai bagian-bagian dari H_{hf} yang berupa suatu fungsi $\mathbf{r}$), kemudian bagian yang berisi operator spin $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{I}$.

Bagian yang merupakan fungsi $\mathbf{r}$ dapat dihitung nilainya menggunakan basis $|\phi_{nlm}\rangle$ (gunakan Eq. (64)):

$$\begin{aligned}
\langle\phi_{n00}|H_{hf}|\phi_{n00}\rangle &= \int d\mathbf{r}\ \langle\phi_{n00}|\mathbf{r}\rangle H_{hf}(\mathbf{r})\langle\mathbf{r}|\phi_{n00}\rangle \\
&= \int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})H_{hf}(\mathbf{r})\phi_{n00}(\mathbf{r}) \\
&= \frac{Z\alpha\hbar}{2M_N m_e c} g_N \left(3\int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})\frac{(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{S}})(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}})}{r^5}\phi_{n00}(\mathbf{r})\right. \\
&\quad - \int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})\frac{(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})}{r^3}\phi_{n00}(\mathbf{r}) \\
&\quad \left. + \frac{8\pi}{3}\int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})\delta(\mathbf{r})\phi_{n00}(\mathbf{r})\right)\ .
\end{aligned} \tag{66}$$

Suku 1:

$$\begin{aligned}
3\int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})\frac{(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{S}})(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}})}{r^5}\phi_{n00}(\mathbf{r}) &= 3\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5}(x\hat{S}_x + y\hat{S}_y + z\hat{S}_z)(x\hat{I}_x + y\hat{I}_y + z\hat{I}_z) \\
&= 3\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5}(x^2\hat{S}_x\hat{I}_x + y^2\hat{S}_y\hat{I}_y + z^2\hat{S}_z\hat{I}_z) \\
&\quad + 3\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5}[xy(\hat{S}_x\hat{I}_y + \hat{S}_y\hat{I}_x) \\
&\quad + xz(\hat{S}_x\hat{I}_z + \hat{S}_z\hat{I}_x) + yz(\hat{S}_y\hat{I}_z + \hat{S}_z\hat{I}_y)]\ .
\end{aligned} \tag{67}$$

Catatan:

- $\hat{\mathbf{S}}$ dan $\hat{\mathbf{I}}$, berarti juga semua komponennya, tidak bergantung pada posisi, sehingga dapat dikeluarkan dari integral $\int d\mathbf{r}$.
- $\phi_{n00}(\mathbf{r})$ bersifat *spherically symmetric*, nilainya sama ke segala arah, serupa dengan $r = |\mathbf{r}|$.
- suku x^2, y^2, z^2:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r}\ r^2\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} &= \int d\mathbf{r}\ (x^2+y^2+z^2)\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} \\
\to \int d\mathbf{r}\ x^2\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} &= \int d\mathbf{r}\ y^2\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = \int d\mathbf{r}\ z^2\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} \\
&= \frac{1}{3}\int d\mathbf{r}\ r^2\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = \frac{1}{3}\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^3}
\end{aligned} \tag{68}$$

- $|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2$ fungsi genap. Juga, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ fungsi genap.

– suku xy, xz, yz:

$$\int d\mathbf{r}\ xy\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = \int dx\ x \int dy\ y \int dz \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = 0 \quad \text{(integrand f. ganjil)} \tag{69}$$

$$\rightarrow \int d\mathbf{r}\ xy\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = \int d\mathbf{r}\ xz\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = \int d\mathbf{r}\ yz\frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^5} = 0 \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow 3\int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})\frac{(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{S}})(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{I}})}{r^5}\phi_{n00}(\mathbf{r}) &= (\hat{S}_x\hat{I}_x + \hat{S}_y\hat{I}_y + \hat{S}_z\hat{I}_z)\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^3} \\ &= (\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{I}})\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^3}\,. \end{aligned} \tag{71}$$

Suku 2:

$$-\int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})\frac{(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})}{r^3}\phi_{n00}(\mathbf{r}) = -(\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{I}})\int d\mathbf{r}\ \frac{|\phi^*_{n00}(\mathbf{r})|^2}{r^3} = -\ \text{Suku 1}\,. \tag{72}$$

Suku 3:

$$\begin{aligned}\frac{8\pi}{3}\int d\mathbf{r}\ \phi^*_{n00}(\mathbf{r})(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})\delta(\mathbf{r})\phi_{n00}(\mathbf{r}) &= \frac{8\pi}{3}|\phi_{n00}(0)|^2(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{8\pi}{3}R^2_{n0}(0)|Y_{00}|^2(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{8\pi}{3}\left[2\left(\frac{Z\alpha m_e c}{n\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)^2(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{8}{3}\left(\frac{Z\alpha m_e c}{n\hbar}\right)^3(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Jadi, *fortunately*, evaluasi di ruang $\mathbf{r}$ menyisakan bagian spin yang lebih sederhana untuk dihitung:

$$\begin{aligned}\rightarrow \langle\phi_{n00}|H_{hf}|\phi_{n00}\rangle &= \frac{Z\alpha\hbar}{2M_N m_e c}g_N\frac{8}{3}\left(\frac{Z\alpha m_e c}{n\hbar}\right)^3(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{4}{3n^3}\frac{(Z\alpha)^4}{M_N}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^2 g_N(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}}) \\ &= -\ E^{(0)}_n\frac{8(Z\alpha)^2}{3n\hbar^2}\frac{m_e}{M_N}g_N(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})\,. \end{aligned} \tag{74}$$

Untuk menghitung $\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}$, kita gunakan penjumlahan spin inti dan spin elektron ($\mathbf{F} = \mathbf{I}+\mathbf{S}$). Dengan kata lain, kita pakai keadaan eigen spin total $\hat{\mathbf{F}}$, yaitu $|f\lambda_f\rangle$, sebagai basis di ruang spin:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{S} \tag{75}$$

$$\mathbf{F}^2 = (\mathbf{I}+\mathbf{S})^2 = \mathbf{I}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} \tag{76}$$

$$\rightarrow \mathbf{I}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^2 - \mathbf{I}^2 - \mathbf{S}^2) \tag{77}$$

Kita peroleh pergeseran energi akibat interaksi antara spin inti $\mathbf{I}$ dan spin elektron $\mathbf{S}$:

$$\langle f\lambda_f|\langle\phi_{n00}|H_{hf}|\phi_{n00}\rangle|f\lambda_f\rangle = -\ E^{(0)}_n\frac{8(Z\alpha)^2}{3n\hbar^2}\frac{m_e}{M_N}g_N\langle f\lambda_f|(\hat{\mathbf{I}}\cdot\hat{\mathbf{S}})|f\lambda_f\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= -E_n^{(0)}\frac{8(Z\alpha)^2}{3n\hbar^2}\frac{m_e}{M_N}g_N\frac{1}{2}\langle f\lambda_f|(\hat{\mathbf{F}}^2-\hat{\mathbf{I}}^2-\hat{\mathbf{S}}^2)|f\lambda_f\rangle \\
&= -E_n^{(0)}\frac{4(Z\alpha)^2}{3n}\frac{m_e}{M_N}g_N\left[f(f+1)-i(i+1)-\frac{3}{4}\right]. \qquad (78)
\end{aligned}
$$

Melihat faktor $\frac{m_e}{M_N}$ dapat dipahami bahwa pengaruh spin inti pada pergeseran energi atom hidrogen sangat kecil dibandingkan dengan efek relativistik Eq. (17) dan efek spin-orbit Eq. (34). Untuk inti paling ringan pun, yaitu proton, $\frac{m_e}{M_N}\simeq 10^{-3}$.

- Untuk inti yang terdiri dari hanya 1 proton, spin inti $i=\frac{1}{2}$ (sama dengan spin proton), spin total $f=0,1$:

$$
\begin{aligned}
\langle f\lambda_f|\langle\phi_{n00}|H_{hf}|\phi_{n00}\rangle|f\lambda_f\rangle &= -E_n^{(0)}\frac{4\alpha^2}{3n}\frac{m_e}{M_N}g_N\left[f(f+1)-\frac{3}{2}\right] \\
&= -E_n^{(0)}\frac{4\alpha^2}{3n}\frac{m_e}{M_N}g_N\begin{bmatrix}2-\frac{3}{2}\\ 0-\frac{3}{2}\end{bmatrix} \\
&= -E_n^{(0)}\frac{2\alpha^2}{3n}\frac{m_e}{M_N}g_N\begin{cases}1\\ -3\end{cases}. \qquad (79)
\end{aligned}
$$

G. Efek massa tereduksi

Dalam penjabaran di atas kita telah mengganti massa tereduksi atom hidrogen, yaitu μ, dengan massa elektron m_e. Penggantian ini dapat diterima, mengingat massa inti jauh lebih besar dari massa elektron, sehingga:

$$
\mu=\frac{M_N m_e}{M_N+m_e}=m_e\left(1+\frac{m_e}{M_N}\right)^{-1}\simeq m_e\left(1-\frac{m_e}{M_N}\right)\simeq m_e\,. \qquad (80)
$$

Namun, di sini kita ingin lihat secara ringkas gambaran efek massa tereduksi, yaitu apabila kita biarkan μ tidak diganti dengan m_e. Ini sama dengan kita perhitungkan juga gerakan inti atom. Dalam kerangka pusat massa, elektron bergerak dengan momentum $\mathbf{p}$ dan inti atom bergerak dengan momentum $-\mathbf{p}$, sehingga pusat massa diam. Energi kinetik sistem sama dengan jumlah energi kinetik inti atom dan energi kinetik elektron:

$$
\frac{\mathbf{p}^2}{2M_N}+\frac{\mathbf{p}^2}{2m_e}=\frac{\mathbf{p}^2}{2}\left(\frac{1}{M_N}+\frac{1}{m_e}\right)=\frac{\mathbf{p}^2}{2}\frac{(M_N+m_e)}{M_N m_e}=\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}\,. \qquad (81)
$$

- Pada efek relativistik, selain energi kinetik elektron di Eq. (3) kita hitung juga energi kinetik inti atom sebagai berikut:

$$
E_{\text{bergerak}}-E_{\text{diam}}=\left((M_Nc^2)^2+(\mathbf{p}c)^2\right)^{\frac{1}{2}}-M_Nc^2\simeq\frac{\mathbf{p}^2}{2M_N}-\frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8M_N^3c^2}\,, \qquad (82)
$$

sehingga hamiltonian H menjadi:

$$
H=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}-\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8M_N^3c^2}-\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8m_e^3c^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\,, \qquad (83)
$$

dan hamiltonian usikan H_1 menjadi:

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8c^2}\left(\frac{1}{M_N^3}+\frac{1}{m_e^3}\right) \\
&= -\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8c^2}\frac{(M_N^3+m_e^3)}{M_N^3 m_e^3} \\
&= -\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8c^2}\frac{(M_N+m_e)(M_N^2-M_N m_e+m_e^2)}{M_N m_e\ M_N^2 m_e^2} \\
&= -\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8\mu c^2}\frac{(M_N^2-m_e M_N+m_e^2)}{M_N^2 m_e^2} \\
&= -\frac{(\hat{\mathbf{p}}^2)^2}{8\mu m_e^2 c^2}\left(1-\frac{m_e}{M_N}+\frac{m_e^2}{M_N^2}\right). \qquad (84)
\end{aligned}$$

- Pada efek spin elektron, diperoleh energi potential akibat interaksi momen magnetik elektron dan medan magnetik inti sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} &= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) \\
&= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 \mu m_e c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot(\mu\mathbf{v}\times\mathbf{r}) \\
&= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 \mu m_e c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot(\hat{\mathbf{p}}\times\mathbf{r}) \\
&= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 \mu m_e c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}\,, \qquad (85)
\end{aligned}$$

yang setelah koreksi relativistik (lihat Gasiorowicz setelah Eq. (12-6)) menjadi separuhnya:

$$\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r^3 \mu m_e c^2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}\,. \qquad (86)$$

- Pada efek Zeeman dan efek Zeeman anomalis momen magnetik orbital menjadi:

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{e}{2\mu}\mathbf{L}\,, \qquad (87)$$

sehingga potensial H_B untuk efek Zeeman menjadi:

$$H_B = \frac{e}{2\mu}\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{B}\,, \qquad (88)$$

dan untuk efek Zeeman anomalis menjadi:

$$H_B = \left(\frac{e}{2\mu}\hat{\mathbf{L}}+\frac{eg}{2m_e}\hat{\mathbf{S}}\right)\cdot\mathbf{B}\,. \qquad (89)$$

Pada efek Zeeman anomalis, Eqs. (48) dan (59) menjadi:

$$\begin{aligned}
\langle\phi_{njm_jl}|H_B|\phi_{njm_jl}\rangle &= \frac{eB}{2}\langle\phi_{njm_jl}|\left(\frac{1}{\mu}\hat{L}_z+\frac{g}{m_e}\hat{S}_z\right)|\phi_{njm_jl}\rangle \\
&= \frac{eB}{2}\langle\phi_{njm_jl}|\left(\frac{1}{\mu}(\hat{L}_z+\hat{S}_z)+\left(\frac{g}{m_e}-\frac{1}{\mu}\right)\hat{S}_z\right)|\phi_{njm_jl}\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{eB}{2}\langle\phi_{njm_jl}|\left(\frac{1}{\mu}\hat{J}_z + \left(\frac{g}{m_e} - \frac{1}{\mu}\right)\hat{S}_z\right)|\phi_{njm_jl}\rangle && (90)\\
&= \frac{eB\hbar}{2\mu}m_j\left\{1 + \left(g\frac{\mu}{m_e} - 1\right)\frac{1}{2j(j+1)}\left[j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}\right]\right\}\\
&= \frac{eB\hbar}{2\mu}m_j\left\{1 + \left(g\frac{\mu}{m_e} - 1\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2j(j+1)}\left(-l(l+1) + \frac{3}{4}\right)\right]\right\}\\
&= \frac{eB\hbar}{2\mu}m_j\left[1 \pm \left(g\frac{\mu}{m_e} - 1\right)\frac{1}{(2l+1)}\right]. && (91)
\end{aligned}
$$

- Pada efek Zeeman permanen yang menghasilkan *hyperfine structure*, efek massa tereduksi dapat diabaikan, mengingat efek Zeeman permanen ini sudah sangat kecil akibat faktor m_e/M_N.