Catatan Mekanika Kuantum 2

Penjumlahan Momentum Angular (lanjutan Spin)

Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 10, Subbab 4 – 5

Di bagian ini dijelaskan mengenai penjumlahan momentum angular. Sebagai momentum angular telah kita kenal momentum angular orbital $\mathbf{L}$ dan spin $\mathbf{S}$. Momentum-momentum angular itu dapat dijumlahkan, tidak hanya spin dengan spin, atau momentum angular orbital dengan momentum angular orbital, melainkan juga spin dengan momentum angular orbital, sehingga dihasilkan momentum angular total. Secara umum, penjumlahan momentum angular dalam mekanika kuantum sama dengan yang di mekanika klasik, yaitu sebagai penjumlahan vektor. Namun, ada beberapa hal yang khusus dalam mekanika kuantum. Kita mulai berikut ini dengan contoh, yaitu penjumlahan spin $\frac{1}{2}$.

D. Penjumlahan dua spin $\frac{1}{2}$

Tak bergantung pada apa partikelnya, ambillah dua spin $\frac{1}{2}$, dengan operatornya yaitu $\hat{\mathbf{S}}_1 = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ dan $\hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$, dengan $\boldsymbol{\sigma}$ adalah operator atau matriks Pauli. Operator spin total adalah $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2 \,. \tag{1}$$

Penjumlahan di Eq. (1) tentu berlaku juga untuk komponen-komponen spin:

$$\hat{S}_u = \hat{S}_{1u} + \hat{S}_{2u} \;, \quad (u = x, y, z) \,, \tag{2}$$

serta untuk operator tangga:

$$\begin{aligned} \hat{S}_\pm &= \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y \\ &= \hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x} \pm i(\hat{S}_{1y} + \hat{S}_{2y}) \\ &= \hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y} + \hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y} \\ &= \hat{S}_{1\pm} + \hat{S}_{2\pm} \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Untuk kedua spin berlaku relasi-relasi komutasi berikut ($j \,\&\, k = 1, 2$):

$$[\hat{S}_{ju}, \hat{S}_{kv}] = \delta_{jk}\, i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{S}_{jw} \qquad \text{dan} \qquad [\hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2] = 0 \,. \tag{4}$$

Untuk spin total berlaku relasi komutasi berikut, sebagaimana yang dipenuhi oleh sebuah momentum angular:

$$[\hat{S}_u, \hat{S}_v] = [\hat{S}_{1u} + \hat{S}_{2u}, \hat{S}_{1v} + \hat{S}_{2v}]$$

$$
\begin{aligned}
&= [\hat{S}_{1u}, \hat{S}_{1v}] + [\hat{S}_{2u}, \hat{S}_{2v}] \\
&= i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{S}_{1w} + i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{S}_{2w} \\
&= i\hbar\epsilon_{uvw}(\hat{S}_{1w} + \hat{S}_{2w}) \\
&= i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{S}_w \,. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Untuk tiap spin $\frac{1}{2}$ ada 2 keadaan eigen, sebut saja:

$$
|\lambda\rangle_j \;, \quad (\lambda = \pm \;,\; j = 1, 2)\,, \tag{6}
$$

yang memenuhi persamaan nilai eigen:

$$
\hat{\mathbf{S}}_j^2|\lambda\rangle_j = \frac{3}{4}\hbar^2|\lambda\rangle_j \qquad \text{dan} \qquad \hat{S}_{jz}|\lambda\rangle_j = \frac{\lambda}{2}\hbar|\lambda\rangle_j \,. \tag{7}
$$

Untuk sistem dua spin $\frac{1}{2}$, dengan demikian, ada 4 keadaan eigen, yang merupakan kombinasi $|\lambda_1\rangle_1$ dan $|\lambda_2\rangle_2$:[1]

$$
|+\rangle_1|+\rangle_2 \;,\; |+\rangle_1|-\rangle_2 \;,\; |-\rangle_1|+\rangle_2 \;,\; |-\rangle_1|-\rangle_2 \,. \tag{9}
$$

Keadaan-keadaan eigen tersebut saling tegak lurus:

$$
{}_1\langle\lambda''|{}_2\langle\lambda'''|\lambda\rangle_1|\lambda'\rangle_2 = {}_1\langle\lambda''|\lambda\rangle_1\,{}_2\langle\lambda'''|\lambda'\rangle_2 = \delta_{\lambda''\lambda}\delta_{\lambda'''\lambda'} \,. \tag{10}
$$

Kini, kita lihat nilai S_z untuk keadaan-keadaan eigen tersebut:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_z|+\rangle_1|+\rangle_2 &= (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z})|+\rangle_1|+\rangle_2 \\
&= \hat{S}_{1z}|+\rangle_1|+\rangle_2 + |+\rangle_1\hat{S}_{2z}|+\rangle_2 \\
&= \frac{1}{2}\hbar|+\rangle_1|+\rangle_2 + |+\rangle_1\frac{1}{2}\hbar|+\rangle_2 \\
&= \hbar|+\rangle_1|+\rangle_2 && (11) \\
\hat{S}_z|+\rangle_1|-\rangle_2 &= 0 && (12) \\
\hat{S}_z|-\rangle_1|+\rangle_2 &= 0 && (13) \\
\hat{S}_z|-\rangle_1|-\rangle_2 &= -\hbar|-\rangle_1|-\rangle_2 \,. && (14)
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai S_z adalah 1, 0, dan -1. Ini mengindikasikan bahwa nilai spin total s adalah 1. Namun, untuk $s = 1$ hanya ada tiga keadaan eigen, sedangkan di sini ada empat keadaan

[1] Keadaan $|\lambda_1\rangle_1|\lambda_2\rangle_2$ yang diberikan di Eq. (9) bukan merupakan perkalian biasa (perkalian matriks biasa) $|\lambda_1\rangle_1$ dan $|\lambda_2\rangle_2$, melainkan perkalian tensor, yaitu $|\lambda_1\rangle_1 \otimes |\lambda_1\rangle_2$. Contoh, dalam representasi matriks:

$$
|+\rangle_1|-\rangle_2 = |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8}
$$

Jadi, untuk sistem dua spin $\frac{1}{2}$, keadaan dinyatakan oleh matriks 4×1, operator oleh matriks 4×4. Di sini orang gabungkan dua ruang spin menjadi satu ruang spin yang lebih besar.

eigen. Satu keadaan, dengan demikian, merupakan keadaan eigen spin dengan nilai berbeda dari 1. Spin yang hanya memiliki 1 keadaan eigen adalah spin bernilai 0, jadi, selain 1, spin total juga dapat bernilai 0. Di sini kita lihat ada 2 keadaan dengan nilai $S_z = 0$. Ini berarti salah satu merupakan keadaan eigen $s = 1$, sedangkan yang lain merupakan keadaan eigen $s = 0$. Sampai di sini, semua sesuai. Namun, masih ada permasalahan. Dua keadaan dengan nilai $S_z = 0$ tersebut adalah $|+\rangle_1|-\rangle_2$ dan $|-\rangle_1|+\rangle_2$, tapi kita tidak tahu yang mana merupakan keadaan eigen $s = 1$ (atau $s = 0$). Kita juga dapat mengkombinasikan dua keadaan itu, $|+\rangle_1|-\rangle_2$ dan $|-\rangle_1|+\rangle_2$, tanpa merubah nilai S_z. Kombinasi sederhana dapat berupa penjumlahan atau pengurangan. Namun, tetap saja kita tidak tahu kombinasi yang mana yang menjadi keadaan eigen $s = 1$ (atau $s = 0$). Untuk menyelesaikan masalah ini, kita gunakan operator tangga, seperti ditunjukkan berikut ini. Ingat kembali operasi operator tangga ($j = 1, 2$):

$$\hat{S}_{j+}|-\rangle_j = \hbar\sqrt{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}|+\rangle_j = \hbar|+\rangle_j \tag{15}$$

$$\hat{S}_{j-}|+\rangle_j = \hbar\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}|-\rangle_j = \hbar|-\rangle_j \,. \tag{16}$$

Untuk $s = 0$, ambillah keadaan eigennya adalah $|00\rangle$. Untuk $s = 1$, ambillah keadaan-keadaan eigennya adalah $|11\rangle$, $|10\rangle$, dan $|1\;-1\rangle$, yang memenuhi relasi-relasi berikut:

$$\mathbf{\hat{S}}^2|1m\rangle = 2\hbar^2|1m\rangle \;, \quad \hat{S}_z|1m\rangle = \hbar m|1m\rangle \;, \quad \hat{S}_\pm|1m\rangle = \hbar\sqrt{2 - m(m \pm 1)}|1, m \pm 1\rangle \,. \tag{17}$$

Secara kolektif $|11\rangle$, $|10\rangle$, dan $|1\;-1\rangle$ disebut sebagai keadaan triplet spin total $s = 1$, dan $|00\rangle$ disebut sebagai keadaan singlet spin total $s = 0$:

$$\text{singlet: } |00\rangle \qquad \text{dan} \qquad \text{triplet: } |11\rangle\,, |10\rangle\,, |1\;-1\rangle\,. \tag{18}$$

Kita mulai dengan keadaan eigen untuk nilai $S_z = 1$, kemudian kerjakan operator $\hat{S}_-$, dan seterusnya:

$$\hat{S}_-|11\rangle = \sqrt{2}\hbar|10\rangle \tag{19}$$

$$\hat{S}_-|10\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\;-1\rangle\,. \tag{20}$$

Kita ulangi Eqs. (19) dan (20), namun dengan mengambil $|+\rangle_1|+\rangle_2$ sebagai $|11\rangle$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{S}_-|11\rangle &= \hat{S}_-|+\rangle_1|+\rangle_2 \\ \to \sqrt{2}\hbar|10\rangle &= (\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})|+\rangle_1|+\rangle_2 \\ &= \hat{S}_{1-}|+\rangle_1|+\rangle_2 + |+\rangle_1\hat{S}_{2-}|+\rangle_2 \\ &= \hbar|-\rangle_1|+\rangle_2 + |+\rangle_1\hbar|-\rangle_2 \\ &= \hbar\left(|-\rangle_1|+\rangle_2 + |+\rangle_1|-\rangle_2\right) \\ &= \hbar\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right) \end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right) && (22)\\
\hat{S}_-|10\rangle &= (\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right)\\
\rightarrow \sqrt{2}\hbar|1\ {-1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{S}_{1-}|+\rangle_1|-\rangle_2 + |+\rangle_1\hat{S}_{2-}|-\rangle_2 + \hat{S}_{1-}|-\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1\hat{S}_{2-}|+\rangle_2\Big)\\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle_1|-\rangle_2 + | + 0 + 0 + |-\rangle_1|-\rangle_2\right)\\
&= \sqrt{2}\hbar|-\rangle_1|-\rangle_2 && (23)\\
\rightarrow |1\ {-1}\rangle &= |-\rangle_1|-\rangle_2\,. && (24)
\end{aligned}
$$

Jadi, keadaan triplet spin total $s = 1$ diperoleh sebagai berikut:

$$
|11\rangle = |+\rangle_1|+\rangle_2\ , \quad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right)\ , \quad |1\ {-1}\rangle = |-\rangle_1|-\rangle_2\,. \tag{25}
$$

Serupa dengan $|10\rangle$, keadaan singlet spin total $s = 0$, yaitu $|00\rangle$, adalah juga kombinasi linier $|+\rangle_1|-\rangle_2$ dan $|-\rangle_1|+\rangle_2$, namun harus ortogonal terhadap $|10\rangle$. Dengan demikian, dinyatakan:

$$
|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)\ . \tag{26}
$$

Dapat ditunjukkan bahwa $|00\rangle$ dan $|10\rangle$ saling ortogonal:

$$
\begin{aligned}
\langle 00|10\rangle &= \frac{1}{2}\left({}_1\langle +|_2\langle -| - {}_1\langle -|_2\langle +|\right)\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left({}_1\langle +|_2\langle -|+\rangle_1|-\rangle_2 + {}_1\langle +|_2\langle -|-\rangle_1|+\rangle_2 - {}_1\langle -|_2\langle +|+\rangle_1|-\rangle_2 - {}_1\langle -|_2\langle +|-\rangle_1|+\rangle_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1 + 0 - 0 - 1\right)\\
&= 0\,. && (27)
\end{aligned}
$$

Untuk lebih memastikan, kita test keadaan triplet dan singlet di Eqs. (25) dan (26), dengan menghitung nilai spin total, menggunakan operator $\hat{\mathbf{S}}^2$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}}^2 &= (\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2)^2\\
&= \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2\\
&= \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2(\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z})\\
&= \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \left(\hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}\right) && (28)\\
\rightarrow \hat{\mathbf{S}}^2|1\ {\pm1}\rangle &= \left[\hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \left(\hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}\right)\right]|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2\\
\rightarrow 2\hbar^2|1\ {\pm1}\rangle &= \hbar^2\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 0\right)|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2\\
&= 2\hbar^2|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2 \quad (s = 1\ ,\ \text{sesuai}) && (29)\\
\rightarrow \hat{\mathbf{S}}^2|10\rangle &= \left[\hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \left(\hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right)\\
\rightarrow 2\hbar^2|10\rangle &= \hbar^2\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right)
\end{aligned}
$$

$$= 2\hbar^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right) \quad (s = 1 \ , \ \text{sesuai}) \tag{30}$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{S}}^2 |00\rangle = \left[\hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \left(\hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right)$$

$$\rightarrow 0 \times |00\rangle = \hbar^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right)$$

$$= 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right) \quad (s = 0 \ , \ \text{sesuai}) \, . \tag{31}$$

Dengan menggunakan Eqs. (25) dan (26) dapat ditunjukkan bahwa semua keadaan triplet dan singlet bersifat ortonormal (ortogonal dan ternormalisasi).

Catatan:

- Pada penjabaran di atas terdapat dua set keadaan, satu set diberikan di Eq. (9), dan satu set diberikan di Eq. (18). Dua set itu ekivalen. Kedua-duanya menyatakan keadaan sistem dua spin $\frac{1}{2}$. Jadi, ini suatu pilihan. Set di Eq. (9) merupakan keadaan eigen bersama (*simultaneous eigenstates*) operator $\hat{\mathbf{S}}_1^2$, $\hat{\mathbf{S}}_2^2$, $\hat{S}_{1z}$, dan $\hat{S}_{2z}$. Jika kita bekerja dengan operator-operator tersebut, atau ingin menyatakan keadaan spin masing-masing partikel, maka lebih mudah memakai set di Eq. (9). Set di Eq. (18) merupakan keadaan eigen bersama operator $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{S}_z$, $\hat{\mathbf{S}}_1^2$, dan $\hat{\mathbf{S}}_2^2$. Jika kita bekerja dengan operator-operator itu, atau ingin menyatakan keadaan spin sistem sebagai satu kesatuan, maka lebih mudah memakai keadaan triplet dan singlet di Eq. (18). Contoh, dalam perhitungan ditemui operator $\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$. Dalam hal ini, lebih mudah bekerja menggunakan keadaan triplet dan singlet, karena $\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ dapat mudah dinyatakan dalam $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}_1^2$, dan $\hat{\mathbf{S}}_2^2$:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2 \right)$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 |sm\rangle = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2 \right) |sm\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left(s(s+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) |sm\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left(s(s+1) - \frac{3}{2} \right) |sm\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \begin{cases} |1m\rangle \\ -3|00\rangle \end{cases} . \tag{32}$$

- Keadaan eigen operator besaran fisika dapat dipakai sebagai keadaan basis, karena bersifat ortogonal dan komplit. Dengan demikian, sembarang keadaan dapat dinyatakan sebagai suatu ekspansi dalam keadaan eigen operator besaran fisika tersebut. Sesuai dengan hal ini, Eqs. (25) dan (26) menunjukkan ekspansi keadaan triplet dan singlet dalam keadaan basis di Eq. (9). Relasi sebaliknya tentu saja dapat juga dicari, yaitu ekspansi keadaan eigen di Eq. (9) dalam keadaan triplet dan singlet di Eq. (18).

- Pada keadaan $|00\rangle$ dan $|10\rangle$ diketahui bahwa komponen z spin total sama dengan nol. Ini berarti bahwa kedua spin saling berlawanan pada sumbu kuantisasi z, yang satu *up* dan yang lain *down*. Namun, tidak diketahui mana yang *up* dan mana yang *down*. Mungkin saja spin 1 *up* dan spin 2 *down*, atau sebaliknya spin 1 *down* dan spin 2 *up*. Sesuai kaidah dalam mekanika kuantum, bahwa semua yang mungkin harus diperhitungkan (ingat saja postulat ekspansi), maka kedua keadaan yang mungkin tersebut diperhitungkan. Dengan demikian, tidaklah mengherankan bahwa keadaan $|00\rangle$ dan $|10\rangle$ merupakan kombinasi linier dua keadaan $|+\rangle_1|-\rangle_2$ dan $|-\rangle_1|+\rangle_2$. Ini tidak berarti bahwa pada saat yang sama sistem berada pada kedua keadaan itu. Hal itu tidak mungkin. Sistem hanya dapat berada pada salah satu keadaan saja, $|+\rangle_1|-\rangle_2$ atau $|-\rangle_1|+\rangle_2$. Kombinasi linier $|+\rangle_1|-\rangle_2$ dan $|-\rangle_1|+\rangle_2$ di sini menyatakan ketidakpastian, ketidakadaan informasi, apakah sistem berada pada keadaan $|+\rangle_1|-\rangle_2$ atau $|-\rangle_1|+\rangle_2$. Yang pasti adalah bahwa sistem mungkin berada pada salah satu keadaan tersebut, dengan peluang yang sama.

Berikut ini kita gunakan sistem dua spin $\frac{1}{2}$ untuk menunjukkan contoh fenomena kuantum, yang dikenal sebagai *entanglement* (keterikatan, keterkaitan). Bayangkan sebuah sistem terdiri dari 2 elektron. Masing-masing elektron bergerak dengan kecepatan yang sama besar, namun berlawanan arah, sehingga pusat massa sistem diam. Anggaplah elektron 1 bergerak ke kanan, elektron 2 bergerak ke kiri. Pada saat terbentuk, ketika itu kedua elektron saling berdekatan, sistem dibuat berada pada keadaan spin singlet. Ini berarti proyeksi spin kedua elektron pada sumbu kuantisasi z saling berlawanan. Salah satu elektron berada pada keadaan spin *up*, yang lain pada keadaan spin *down*, namun tidak diketahui elektron mana berada pada keadaan *up* (atau *down*), sebagaimana ditunjukkan oleh Eq. (26). Dalam representasi matriks, keadaan singlet sistem dinyatakan sebagai berikut:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2\right]. \tag{33}$$

- Jika S_{1z} diukur, maka dapat diharapkan diperoleh hasil $\frac{1}{2}\hbar$ atau $-\frac{1}{2}\hbar$. Anggaplah ternyata hasilnya $-\frac{1}{2}\hbar$, maka tanpa melakukan pengukuran orang tahu pasti bahwa nilai S_{2z} adalah $\frac{1}{2}\hbar$. Keadaan komponen z spin kedua elektron saling terikat (*entangled*), dalam contoh ini sesuai keadaan singlet, meskipun kedua elektron sudah saling berjauhan. Dalam bentuk perhitungan hal itu ditunjukkan sebagai berikut.

  Diperoleh hasil pengukuran $S_{1z} = -\frac{1}{2}\hbar$ (*down*). Ini berarti pengukuran menyebabkan keadaan yang pada awalnya singlet $|00\rangle$ (tidak pasti apakah spin elektron 1 *up* atau *down*) runtuh (*collapse*) atau terproyeksikan ke keadaan $|-\rangle_1|+\rangle_2$ (pasti bahwa spin elektron 1 *down*). Kita cari operator proyeksi (ingat kembali kuliah Mekanika Kuantum 1) keadaan *down* untuk elektron 1, dalam representasi matriks diperoleh:

$$P_1(-) = |-\rangle_{11}\langle -| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1. \tag{34}$$

Pengukuran tersebut di atas beserta hasilnya ditunjukkan oleh operasi $P_1(-)$ pada $|00\rangle$:

$$
\begin{aligned}
P_1(-)|00\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 .
\end{aligned} \tag{35}
$$

Kita lihat di Eq. (35) satu keadaan pasti bahwa pada sumbu kuantisasi z spin elektron 1 *down* dan spin elektron 2 *up*. Jadi, tanpa melakukan pengukuran S_{2z} orang tahu pasti nilainya $\frac{1}{2}\hbar$.

- Keadaan singlet di Eq. (26) tidak memberikan informasi secara pasti tentang keadan spin kedua elektron pada sumbu selain z. Apa hasilnya jika secara bersamaan diukur nilai S_{1x} dan S_{2x} secara terpisah. Semula dianggap bahwa hasil kedua pengukuran itu tidak saling berhubungan, bahwa pengukuran masing-masing secara terpisah dapat memberikan hasil $\frac{1}{2}\hbar$ atau $-\frac{1}{2}\hbar$ dengan peluang yang sama, karena dibayangkan tidak mungkin informasi pengukuran pada elektron yang satu dikirim ke dan mempengaruhi pengukuran pada elektron yang lain dalam waktu sesaat (kecepatan tak berhingga). Jadi, dapat saja dihasilkan $S_{1x} = S_{2x} = \pm\frac{1}{2}\hbar$ maupun $S_{1x} = -S_{2x} = \pm\frac{1}{2}\hbar$. Namun, ternyata tidak demikian. Jika diperoleh $S_{1x} = \frac{1}{2}\hbar$, maka didapatkan $S_{2x} = -\frac{1}{2}\hbar$, atau jika diperoleh $S_{1x} = -\frac{1}{2}\hbar$, maka didapatkan $S_{2x} = \frac{1}{2}\hbar$; secara ringkas berlaku $S_{1x} = -S_{2x} = \pm\frac{1}{2}\hbar$. Jadi, keadaan komponen x spin kedua elektron pun saling terhubung, saling terikat (*entangled*), sebagaimana halnya keadaan komponen spin z kedua elektron itu, sesuai keadaan sistem, dalam hal ini yaitu singlet.

  Kita lihat pengukuran komponen x spin tersebut di atas dalam bentuk perhitungan. Anggaplah diperoleh hasil pengukuran $S_{1x} = \frac{1}{2}\hbar$. Ini berarti pengukuran menyebabkan keadaan yang pada awalnya singlet $|00\rangle$ runtuh atau terproyeksikan ke keadaan S_{1x} *up* berikut (dalam representasi matriks, lihat kembali materi sebelum ini):

$$
\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 . \tag{36}
$$

  Operator proyeksi keadaan S_{1x} *up* diperoleh sebagai berikut:

$$
P_1(+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_1 . \tag{37}
$$

  Operasi $P_1(+)$ pada $|00\rangle$ menghasilkan:

$$
P_1(+)|00\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_2\right] . \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Di Eq. (38) kita lihat sebuah keadaan pasti bahwa pada sumbu kuantisasi x spin elektron 1 *up* dan spin elektron 2 *down*. Jadi, S_{1x} dan S_{2x} terikat sesuai keadaan singlet sistem.

- Bahwa keadaan komponen x spin kedua elektron saling terikat (*entangled*), sebagaimana halnya keadaan komponen spin z kedua elektron itu, sesuai keadaan sistem, ini dapat dipahami, mengingat tidak ada kerangka acuan mutlak di alam. Dalam hal ini sumbu x, y, z bersifat relatif. Yang penting di sini adalah bahwa sistem berada pada keadaan singlet, sehingga spin kedua elektron saling terikat untuk berlawanan arah. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

  Kita nyatakan keadaan eigen $\hat{S}_{jz}$ dengan $|\lambda\rangle_{jz}$, keadaan eigen $\hat{S}_{jx}$ dengan $|\lambda\rangle_{jx}$, dengan $j = 1, 2$ dan $\lambda = \pm$. Keadaan $|\lambda\rangle_{jx}$ dapat dinyatakan dalam keadaan $|\lambda\rangle_{jz}$ sebagai berikut:[2]

$$
|\pm\rangle_{jx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{jz} \pm |-\rangle_{jz}\right) . \qquad (40)
$$

  Sebaliknya, keadaan $|\lambda\rangle_{jz}$ dapat dinyatakan dalam keadaan $|\lambda\rangle_{jx}$ sebagai berikut:[3]

$$
|\pm\rangle_{jz} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{jx} \pm |-\rangle_{jx}\right) . \qquad (42)
$$

  Kita masukkan $|\pm\rangle_{jz}$ di Eq. (42) ke keadaan singlet $|00\rangle$, diperoleh:

$$
|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1z}|-\rangle_{2z} - |-\rangle_{1z}|+\rangle_{2z}\right)
$$

[2] Lebih jelas dalam representasi matriks:

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] . \qquad (39)
$$

[3] Lebih jelas dalam representasi matriks:

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] . \qquad (41)
$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(|+\rangle_{1x} + |-\rangle_{1x})(|+\rangle_{2x} - |-\rangle_{2x}) - (|+\rangle_{1x} - |-\rangle_{1x})(|+\rangle_{2x} + |-\rangle_{2x})\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x} - |-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}) \tag{43}$$

Kita lihat di Eq. (43) bahwa pada keadaan singlet spin kedua elektron pada sumbu kuantisasi x saling berlawanan.

E. Penjumlahan spin $\frac{1}{2}$ dan momentum angular orbital

Kini kita jumlahkan spin **S** dan momentum angular orbital **L** menjadi momentum angular total **J**. Dalam bentuk operator dituliskan:

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}\,. \tag{44}$$

Penjumlahan yang sama tentu berlaku untuk komponen-komponen momentum angular (spin, orbital, total) dan, dengan demikian, juga operator tangga:

$$\hat{J}_u = \hat{L}_u + \hat{S}_u\ ,\ (u = x, y, z) \qquad \text{dan} \qquad \hat{J}_\pm = \hat{L}_\pm + \hat{S}_\pm\,. \tag{45}$$

Komponen-komponen momentum angular total memenuhi relasi komutasi sebagaimana kita kenal:

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_u, \hat{J}_v] &= [\hat{L}_u + \hat{S}_u, \hat{L}_v + \hat{S}_v] \\
&= [\hat{L}_u, \hat{L}_v] + [\hat{S}_u, \hat{S}_v] \\
&= i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{L}_w + i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{S}_w \\
&= i\hbar\epsilon_{uvw}(\hat{L}_w + \hat{S}_w) \\
&= i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{J}_w\,.
\end{aligned} \tag{46}$$

Operator $\hat{\mathbf{J}}^2$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2 &= (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}})^2 \\
&= \hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2 + 2\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}} \\
&= \hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2 + 2(\hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_y\hat{S}_y + \hat{L}_z\hat{S}_z) \\
&= \hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+\,.
\end{aligned} \tag{47}$$

Di bagian ini, sebagai contoh, kita ambil spin $s = \frac{1}{2}$ dan momentum angular orbital dengan sembarang nilai l. Sebagai keadaan eigen spin yaitu $|\lambda\rangle$, $(\lambda = \pm)$, sebagai keadaan eigen momentum angular orbital yaitu $|lm\rangle$, dan sebagai keadaan eigen momentum angular total yaitu $|jm_j\rangle$:

$$\hat{\mathbf{S}}^2|\lambda\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\lambda\rangle\ , \qquad \hat{S}_z|\lambda\rangle = \frac{\lambda}{2}\hbar|\lambda\rangle \tag{48}$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle\ , \qquad \hat{L}_z|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle \tag{49}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2|jm_j\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm_j\rangle\ , \qquad \hat{J}_z|jm_j\rangle = m_j\hbar|jm_j\rangle\ . \tag{50}$$

Untuk momentum angular orbital l terdapat $2l+1$ keadaan eigen dengan nilai m berbeda $(m = l, l-1, ..., 0, ..., -l+1, -l)$. Untuk spin $s = \frac{1}{2}$ terdapat $2s+1 = 2\times\frac{1}{2}+1 = 2$ keadaan eigen. Dengan demikian, jumlah total keadaan eigen pada penjumlahan spin $s = \frac{1}{2}$ dan momentum angular orbital l adalah $2(2l+1)$. Seperti berlaku pada penjumlahan dua spin $\frac{1}{2}$, keadaan sistem dengan momentum angular orbital dan spin dijumlahkan dapat dinyatakan dalam keadaan eigen operator $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\mathbf{L}}^2$, dan $\hat{\mathbf{S}}^2$, yaitu $|jm_j\rangle$, atau dalam keadaan eigen operator $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{L}_z$, dan $\hat{S}_z$, yaitu $|lm\rangle|\lambda\rangle$ (catatan: $|lm\rangle|\lambda\rangle = |lm\rangle \otimes |\lambda\rangle$).

Sesuai Eq. (45), relasi antara m_j, m, dan λ adalah:

$$m_j = m + \frac{\lambda}{2}\ . \tag{51}$$

Nilai tertinggi m adalah l, dengan demikian, nilai tertinggi m_j adalah $l+\frac{1}{2}$. Keadaan dengan $m_j = l+\frac{1}{2}$ hanya ada satu, yaitu $|ll\rangle|+\rangle$. Ini mengindikasikan bahwa j dapat bernilai $l+\frac{1}{2}$, sebagai nilai terbesar, seperti ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2|ll\rangle|+\rangle &= \left[\hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \left(\hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+\right)\right]|ll\rangle|+\rangle \\
\rightarrow \hbar^2 j(j+1)|ll\rangle|+\rangle &= \hbar^2\left[l(l+1) + \frac{3}{4} + l + 0\right]|ll\rangle|+\rangle \\
&= \hbar^2\left[l(l+2) + \frac{3}{4}\right]|ll\rangle|+\rangle \\
&= \hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)|ll\rangle|+\rangle \\
\rightarrow j &= l + \frac{1}{2}\ .
\end{aligned} \tag{52}$$

Nilai tertinggi ke-2 m_j adalah $l-\frac{1}{2}$. Keadaan dengan $m_j = l-\frac{1}{2}$ ada dua, ditunjukkan oleh $|ll\rangle|-\rangle$ dan $|l\ l{-}1\rangle|+\rangle$. Ini berarti ada satu keadaan yang merupakan keadaan eigen dengan $j = l+\frac{1}{2}$, dan ada satu keadaan lain yang merupakan keadaan eigen dengan $j = l-\frac{1}{2}$. Nilai tertinggi ke-3 m_j adalah $l-\frac{3}{2}$. Keadaan dengan $m_j = l-\frac{3}{2}$ ada dua, ditunjukkan oleh $|l\ l{-}1\rangle|-\rangle$ dan $|l\ l{-}2\rangle|+\rangle$. Ini berarti ada satu keadaan yang merupakan keadaan eigen dengan $j = l+\frac{1}{2}$, dan ada satu keadaan lain yang merupakan keadaan eigen dengan $j = l-\frac{1}{2}$. Kita dapat saja lanjutkan, namun, akan didapatkan bahwa ada dua nilai j yang mungkin dalam penjumlahan ini, yaitu $l \pm \frac{1}{2}$.[4] Contoh, dalam perhitungan ditemui potensial berisi operator $\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}}$ (dikenal

[4] Sesuai sifat momentum angular dalam mekanika kuantum, nilai-nilai m_j adalah $j, j-1, ..., -j+1, -j$. Untuk $j = l+\frac{1}{2}$ berlaku $m_j = l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}, l-\frac{3}{2}, ..., -l+\frac{3}{2}, -l+\frac{1}{2}, -l-\frac{1}{2}$, jumlah variasi nilai m_j tersebut adalah $2(l+\frac{1}{2})+1 = 2l+2$. Untuk $j = l-\frac{1}{2}$ berlaku $m_j = l-\frac{1}{2}, l-\frac{3}{2}, ..., -l+\frac{3}{2}, -l+\frac{1}{2}$, jumlah variasi nilai m_j tersebut adalah $2(l-\frac{1}{2})+1 = 2l$. Dengan demikian, jumlah total variasi nilai m_j, yang berarti jumlah total keadaan eigen, adalah $2l+2+2l = 2(2l+1)$. Ada 1 keadaan dengan $m_j = l+\frac{1}{2}$, yaitu $|l{+}\frac{1}{2}\ l{+}\frac{1}{2}\rangle = |ll\rangle|+\rangle$, dan 1 keadaan dengan $m_j = -l-\frac{1}{2}$, yaitu $|l{+}\frac{1}{2}\ -l{-}\frac{1}{2}\rangle = |l\ {-l}\rangle|-\rangle$, sedangkan untuk tiap nilai m_j yang lain ada dua keadaan.

dengan sebutan *spin-orbit interaction*, *spin-orbit force*, *spin-orbit potential*). Nilainya dapat dihitung sebagai berikut, menggunakan keadaan eigen $|jm_j\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2 &= \hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2 + 2\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}} \\
\rightarrow \hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2\right) \\
\rightarrow \hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}}|jm_j\rangle &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2\right)|jm_j\rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)|jm_j\rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left[\left(l \pm \frac{1}{2}\right)\left(l \pm \frac{1}{2} + 1\right) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\left|l{\pm}\frac{1}{2}\ m_j\right\rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{1}{2}\left(2l+\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4}\right]\left|l{+}\frac{1}{2}\ m_j\right\rangle \\ \left[-\frac{1}{2}\left(2l+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\right]\left|l{-}\frac{1}{2}\ m_j\right\rangle\end{array}\right. \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left\{\begin{array}{l} l\left|l{+}\frac{1}{2}\ m_j\right\rangle \\ -(l+1)\left|l{-}\frac{1}{2}\ m_j\right\rangle\end{array}\right. .
\end{aligned} \tag{53}
$$

Keadaan $|jm_j\rangle$ dapat dinyatakan dalam keadaan $|lm\rangle|\lambda\rangle$, dan begitu pula sebaliknya. Sebagai contoh (lihat penurunan detil di Gasiorowicz Supplement 10-A):

$$\left|l{+}\frac{1}{2}\ m{+}\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\,|lm\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}\,|l\ m{+}1\rangle|-\rangle \tag{54}$$

$$\left|l{-}\frac{1}{2}\ m{+}\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}\,|lm\rangle|+\rangle - \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\,|l\ m{+}1\rangle|-\rangle\,. \tag{55}$$

F. Penjumlahan momentum angular secara umum

Ambillah dua momentum angular $\mathbf{J}_1$ dan $\mathbf{J}_2$, yang dapat berupa spin (bernilai bulat (*integer*) maupun kelipatan ganjil dari setengah (*half-odd*)) atau momentum angular orbital. Jumlah kedua momentum angular tersebut kita nyatakan sebagai $\mathbf{J}$, sehingga operator ketiga momentum angular tersebut memenuhi relasi:

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2 \tag{56}$$

$$\hat{J}_u = \hat{J}_{1u} + \hat{J}_{2u}\ ,\ \ (u = x, y, z) \tag{57}$$

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_{1\pm} + \hat{J}_{2\pm}\,. \tag{58}$$

Komponen-komponen momentum angular tersebut memenuhi relasi komutasi sebagaimana kita kenal:

$$[\hat{J}_{au}, \hat{J}_{bv}] = \delta_{ab}\, i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{J}_{aw}\ ,\ \ (a\,\&\,b = 1, 2) \tag{59}$$

$$[\hat{J}_u, \hat{J}_v] = i\hbar\epsilon_{uvw}\hat{J}_w\,. \tag{60}$$

Operator $\hat{\mathbf{J}}^2$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{\mathbf{J}}_1^2 + \hat{\mathbf{J}}_2^2 + 2\hat{\mathbf{J}}_1\cdot\hat{\mathbf{J}}_2 = \hat{\mathbf{J}}_1^2 + \hat{\mathbf{J}}_2^2 + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} + \hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+}\,. \tag{61}$$

Keadaan-keadaan eigen momentum angular 1, 2, dan total berturut-turut dapat dinyatakan sebagai $|j_1 m_1\rangle$, $|j_2 m_2\rangle$, dan $|jm\rangle$:

$$\hat{\mathbf{J}}_a^2|j_a m_a\rangle = \hbar^2 j_a(j_a+1)|j_a m_a\rangle\ , \qquad \hat{J}_{az}|j_a m_a\rangle = m_a\hbar|j_a m_a\rangle\ , \quad (a=1,2) \tag{62}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle\ , \qquad \hat{J}_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle\ . \tag{63}$$

Untuk momentum angular 1 dan 2 berturut-turut terdapat $2j_1+1$ dan $2j_2+1$ keadaan eigen. Dengan demikian, jumlah total keadaan eigen pada penjumlahan kedua momentum angular adalah $(2j_1+1)(2j_2+1)$. Keadaan sistem dua momentum angular tersebut dapat dinyatakan dalam keadaan eigen operator $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\mathbf{J}}_1^2$, dan $\hat{\mathbf{J}}_2^2$, yaitu $|jm\rangle$, atau dalam keadaan eigen operator $\hat{\mathbf{J}}_1^2$, $\hat{\mathbf{J}}_2^2$, $\hat{J}_{1z}$, dan $\hat{J}_{2z}$, yaitu $|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle$.

Sesuai Eq. (57), relasi antara m, m_1, dan m_2 adalah:

$$m = m_1 + m_2\ . \tag{64}$$

Nilai tertinggi m_1 dan m_2 berturut-turut adalah j_1 dan j_2. Dengan demikian, nilai tertinggi m adalah j_1+j_2. Keadaan dengan $m = j_1+j_2$ hanya satu, yaitu $|j_1 j_1\rangle|j_2 j_2\rangle$. Ini berarti j dapat bernilai j_1+j_2, sebagai nilai terbesar, seperti ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2|j_1 j_1\rangle|j_2 j_2\rangle &= \left[\hat{\mathbf{J}}_1^2 + \hat{\mathbf{J}}_2^2 + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} + \left(\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+}\right)\right]|j_1 j_1\rangle|j_2 j_2\rangle \\
\rightarrow \hbar^2 j(j+1)|j_1 j_1\rangle|j_2 j_2\rangle &= \hbar^2\left[j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1 j_2 + 0\right]|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2 \\
&= \hbar^2\left[(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\right]|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2 \\
\rightarrow j &= j_1 + j_2\ .
\end{aligned} \tag{65}$$

Nilai tertinggi ke-2 m adalah j_1+j_2-1. Keadaan dengan $m = j_1+j_2-1$ ada dua, ditunjukkan oleh $|j_1 j_1\rangle|j_2\ j_2{-}1\rangle$ dan $|j_1\ j_1{-}1\rangle|j_2 j_2\rangle$. Ini berarti ada satu keadaan yang merupakan keadaan eigen dengan $j = j_1+j_2$, dan ada keadaan lain yang merupakan keadaan eigen dengan $j = j_1+j_2-1$. Nilai tertinggi ke-3 m adalah j_1+j_2-2. Keadaan dengan $m = j_1+j_2-2$ ada tiga, ditunjukkan oleh $|j_1 j_1\rangle|j_2\ j_2{-}2\rangle$, $|j_1\ j_1{-}1\rangle|j_2\ j_2{-}1\rangle$, dan $|j_1\ j_1{-}2\rangle|j_2 j_2\rangle$. Ini berarti ada satu keadaan yang merupakan keadaan eigen dengan $j = j_1+j_2$, ada satu keadaan lain yang merupakan keadaan eigen dengan $j = j_1+j_2-1$, dan ada satu lagi keadaan lain yang merupakan keadaan eigen dengan $j = j_1+j_2-2$. Demikian seterusnya, kita dapatkan nilai-nilai j sebagai berikut:

$$j = j_1+j_2, j_1+j_2-1, j_1+j_2-2, ..., |j_1-j_2|\ . \tag{66}$$

Untuk tiap nilai j di Eq. (66) berlaku nilai m sebagai berikut:

$$m = j, j-1, ..., -j+1, -j\ . \tag{67}$$

Seperti layaknya penjumlahan dua vektor, nilai terbesar diperoleh apabila kedua vektor searah, yaitu sama dengan jumlah nilai kedua vektor, sedangkan nilai terkecil diperoleh jika kedua vektor saling berlawanan arah, yaitu selisih nilai kedua vektor. Dalam mekanika klasik, j dapat bernilai berapa saja dari $j_1 + j_2$ sampai $|j_1 - j_2|$, namun, dalam mekanika kuantum, nilai j diskrit seperti diberikan di Eq. (66).

Keadaan $|jm\rangle$ dapat dinyatakan dalam keadaan $|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{m_1m_2} C(jm; j_1m_1j_2m_2)|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle \\ &= \sum_{m_1} C(jm; j_1m_1j_2(m - m_1))|j_1m_1\rangle|j_2\; m{-}m_1\rangle\,, \end{aligned} \tag{68}$$

dengan $C(jm; j_1m_1j_2m_2)$ disebut koefisien Clebsch-Gordan, yang bernilai riil. Persamaan (68) menerapkan relasi di Eq. (64). Koefisien Clebsch-Gordan bernilai nol apabila nilai-nilai argumennya j, j_1, j_2 dan m, m_1, m_2 tidak memenuhi relasi di Eqs. (66) dan (64). Sebaliknya, keadaan $|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle$ dapat dinyatakan dalam keadaan $|jm\rangle$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle &= \sum_{j} C(jm; j_1m_1j_2m_2)|jm_j\rangle \\ &= \sum_{j} C(j(m_1 + m_2); j_1m_1j_2m_2)|j\; m_1{+}m_2\rangle\,. \end{aligned} \tag{69}$$

Beberapa contoh koefisien Clebsch-Gordan diberikan di Gasiorowicz Supplement 10-A.