Catatan Mekanika Kuantum 2

Spin

Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 10, Subbab 1 – 3

Dari eksperimen-eksperimen, seperti eksperimen mengenai spektrum atom, orang simpulkan bahwa ada suatu besaran fisika, yang termasuk momentum angular. Besaran itu orang sebut sebagai spin, dan merupakan besaran intrinsik sebuah partikel. Operator spin biasa dinyatakan dengan simbol $\hat{\mathbf{S}}$. Sifat dan relasi yang berlaku pada operator momentum angular berlaku juga pada spin, seperti relasi komutasi berikut:

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{S}_l \,. \tag{1}$$

Dengan memasukkan spin dalam perhitungan, bersama momentum angular orbital yang orang sudah kenal, sehingga diperoleh momentum angular total, fenomena-fenomena tersebut dapat dijelaskan. Efek spin tampak dalam fenomena kuantum, namun tidak muncul dalam fenomena klasik.

Sebagai momentum angular, satuan spin adalah juga $\hbar$. Jika, misalkan, disebutkan spin 2, maka yang dimaksud adalah nilai spin itu $2\hbar$. Berbeda dari momentum angular orbital, yang hanya bernilai bulat (*integer*), spin dapat bernilai bulat maupun kelipatan ganjil dari setengah (*half-odd*). Kita ingat bahwa di alam ada dua kelompok partikel berdasarkan nilai spin partikel-partikel itu. Partikel berspin *integer* disebut boson, sedangkan partikel berspin *half-odd* disebut fermion.

Dalam mekanika klasik, momentum angular orbital berkenaan dengan suatu gerak melingkar atau rotasi yang dapat dibayangkan, seperti rotasi batu yang diikat pada ujung tali, gerak orbit bulan terhadap bumi. Meskipun spin juga merupakan momentum angular, namun gerak yang berkenaan dengan spin tidak terbayangkan. Dengan demikian, spin tidak dapat direpresentasikan sebagai suatu fungsi atau operator matematik seperti halnya momentum angular orbital $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\hat{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\nabla}$. Merepresentasikan spin dilakukan dengan menggunakan matriks.

Dari tiga komponen momentum angular orbital, yang dipilih untuk bersama dengan $\hat{\mathbf{L}}^2$ memiliki keadaan eigen simultan adalah komponen z, $\hat{L}_z$. Hal yang sama dilakukan juga pada spin. Persamaan nilai eigen $\hat{\mathbf{S}}^2$ dan $\hat{S}_z$ diberikan sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{S}}^2|s\lambda\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\lambda\rangle \tag{2}$$

$$\hat{S}_z|s\lambda\rangle = \hbar\lambda|s\lambda\rangle\,. \tag{3}$$

Keadaan eigen spin memiliki ortogonalitas dan relasi kekomplitan sebagai berikut:

$$\langle s'\lambda'|s\lambda\rangle = \delta_{s's}\delta_{\lambda'\lambda} \qquad \text{dan} \qquad \sum_{s\lambda}|s\lambda\rangle\langle s\lambda| = 1\,. \tag{4}$$

Untuk spin juga dikenal operator tangga $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, yang mengikuti relasi berikut:

$$\hat{S}_\pm|s\lambda\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-\lambda(\lambda\pm 1)}|s,\lambda\pm 1\rangle\,. \tag{5}$$

Jika dipilih keadaan eigen $\hat{S}_z$ sebagai basis, representasi matriks operator spin diperoleh sebagai berikut, dengan $\hat{\mathbf{S}}^2$ dan $\hat{S}_z$ diagonal (perhatikan, kita lihat untuk nilai s tertentu, sehingga $s' = s$):

$$\langle s\lambda'|\hat{\mathbf{S}}^2|s\lambda\rangle = \hbar^2 s(s+1)\delta_{\lambda'\lambda} \tag{6}$$

$$\langle s\lambda'|\hat{S}_z|s\lambda\rangle = \hbar\lambda\delta_{\lambda'\lambda} \tag{7}$$

$$\langle s\lambda'|\hat{S}_\pm|s\lambda\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-\lambda(\lambda\pm 1)}\delta_{\lambda',\lambda\pm 1}\,. \tag{8}$$

Catatan: Untuk selanjutnya, meski tidak disebutkan, dipakai keadaan eigen $\hat{S}_z$ sebagai basis.

A. Spin $\frac{1}{2}$

Untuk spin $\frac{1}{2}$ ($s = \frac{1}{2}$) terdapat dua keadaan eigen, yaitu keadaan dengan $\lambda = \frac{1}{2}$, disebut keadaan spin *up*, dan keadaan dengan $\lambda = -\frac{1}{2}$, disebut keadaan spin *down*. Dari Eqs. (6) - (8), operator-operator spin dalam representasi matriks diperoleh sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{10}$$

Kita kenal matriks Pauli $\boldsymbol{\sigma}$, dengan komponen-komponen sebagai berikut:[1]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{14}$$

---

[1] Matriks Pauli memenuhi relasi berikut:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\hat{1}\,. \tag{11}$$

Relasi komutasi matriks Pauli diperoleh sebagai berikut:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l \tag{12}$$

Relasi antikomutasi matriks Pauli diperoleh sebagai berikut:

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk}\,. \tag{13}$$

Dengan demikian, operator spin $\frac{1}{2}$ dapat dinyatakan dalam matriks Pauli:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\,. \tag{15}$$

Jika kita nyatakan keadaan eigen spin $\frac{1}{2}$ dalam notasi yang lebih singkat sebagai berikut:

$$|+\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \qquad \text{dan} \qquad |-\rangle = \left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle\,, \tag{16}$$

maka representasi matriks $|+\rangle$ dan $|-\rangle$ diperoleh sebagai berikut:[2]

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{17}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $|+\rangle$ dan $|-\rangle$ di Eq. (17) memenuhi persamaan nilai eigen Eqs. (2) dan (3).[3] Sembarang keadaan spin $\frac{1}{2}$ dapat dinyatakan dalam kombinasi linier $|+\rangle$ dan $|-\rangle$ di Eq. (17):

$$\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \alpha_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \tag{20}$$

dengan $|\alpha_+|^2$ dan $|\alpha_-|^2$ masing-masing menyatakan peluang mendapatkan keadaan spin *up* dan keadaan spin *down*, dan, untuk keadaan yang ternormalisasi:

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1\,. \tag{21}$$

Untuk spin $\frac{1}{2}$ berlaku operator berupa matriks 2×2. Anggaplah suatu operator:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,. \tag{22}$$

Nilai ekspektasi operator $\hat{O}$ untuk sistem dengan keadaan spin dalam Eq. (20) adalah:

$$\langle O \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_+^* & \alpha_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} \tag{23}$$

---

[2] Perhatikan bahwa representasi matriks keadaan eigen suatu operator dalam basis yang merupakan keadaan eigen operator tersebut mempunyai bentuk serupa dengan yang ditunjukkan dalam Eq. (17), dan sesuai dengan ukuran matriks operator tersebut.

[3] Dapat ditunjukkan juga bahwa hasil di Eq. (17) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan nilai eigen Eq. (3) sebagai berikut:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hbar\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u = 2\lambda u \\ v = -2\lambda v \end{matrix} \rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\,,\ u = \text{sembarang}\,,\ v = 0 \qquad \text{dan} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\,,\ u = 0\,,\ v = \text{sembarang}\,. \tag{18}$$

Diperoleh keadaan eigen ternormalisasi:

$$\lambda = \frac{1}{2}\,,\ |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\,,\ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{19}$$

Nilai espektasi $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ diperoleh sebagai berikut:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha_+^* & \alpha_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left(\alpha_+^* \alpha_- + \alpha_-^* \alpha_+ \right) \tag{24}$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha_+^* & \alpha_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \frac{-i\hbar}{2} \left(\alpha_+^* \alpha_- - \alpha_-^* \alpha_+ \right) \tag{25}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha_+^* & \alpha_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left(|\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2 \right) . \tag{26}$$

Pada penjelasan di atas kita pahami bahwa untuk proyeksi spin $\frac{1}{2}$ pada sumbu z terdapat 2 keadaan yang mungkin, *up* dan *down*. Sesungguhnya, itu tidak hanya berlaku untuk sumbu z, melainkan berlaku umum untuk sembarang sumbu. Ambillah sebuah sumbu, yang berada di bidang xy, yang membentuk sudut ϕ terhadap sumbu x, jika diukur berlawanan arah gerak jarum jam (cara standar mengukur sudut pada bidang xy). Operator komponen spin pada sumbu tersebut adalah, sebut saja $\hat{S}_{xy}$:

$$\hat{S}_{xy} = \hat{S}_x \cos\phi + \hat{S}_y \sin\phi = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos\phi - i\sin\phi \\ \cos\phi + i\sin\phi & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} . \tag{27}$$

Keadaan dan nilai eigen $\hat{S}_{xy}$ diperoleh sebagai berikut (kita tahu bahwa satuan nilai spin adalah $\hbar$, sehingga nilai eigen dinyatakan sebagai $\hbar\lambda$):

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hbar\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ve^{-i\phi} \\ ue^{i\phi} \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ & \to \begin{matrix} ve^{-i\phi} = 2\lambda u \\ ue^{i\phi} = 2\lambda v \end{matrix} \to uv = 4\lambda^2 uv \to \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \to \lambda = \pm\frac{1}{2} \\ & \to \lambda = \frac{1}{2} \ , \ u = \text{sembarang} \ , \ v = ue^{i\phi} \quad \text{dan} \quad \lambda = -\frac{1}{2} \ , \ u = -ve^{-i\phi} \ , \ v = \text{sembarang} \end{aligned} \tag{28}$$

Diperoleh keadaan eigen ternormalisasi dan ortogonal:[4]

$$\lambda = \frac{1}{2} \ , \ |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \lambda = -\frac{1}{2} \ , \ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ -e^{i\phi/2} \end{pmatrix} . \tag{31}$$

Sebagai contoh perhitungan, lihat Gasiorowicz Example 10-1. Perhatikan bahwa dalam suatu perhitungan digunakan basis yang sama, meskipun pilihan basis tersebut bersifat bebas. Sebagaimana lazimnya, jika tanpa keterangan tertentu, maka basis yang dipakai adalah keadaan

[4]

$$\langle +|+\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = 1 \ , \ \langle -|-\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & -e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ -e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = 1 \tag{29}$$

$$\langle -|+\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & -e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = 0 . \tag{30}$$

eigen operator $\hat{S}_z$, sebut saja $|\lambda\rangle_z$, $\lambda = \pm$. Pada contoh tersebut, berdasarkan pengukuran S_x, diketahui sebuah sistem berada pada keadaan *up*, sebut saja $|+\rangle_x$. Apabila kemudian dilakukan pengukuran S_{xy}, berapa peluang mendapatkan hasilnya menunjukkan keadaan *up*, yaitu $|+\rangle_{xy}$? Jadi, dihitung kuadrat dari proyeksi $|+\rangle_x$ pada $|+\rangle_{xy}$:

$$P = |_{xy}\langle +|+\rangle_x|^2 = \left|\sum_\lambda {}_{xy}\langle +|\lambda\rangle_{zz}\langle\lambda|+\rangle_x\right|^2 , \tag{32}$$

dengan $_z\langle\lambda|+\rangle_x$ dan $_z\langle\lambda|+\rangle_{xy}$ berturut-turut adalah keadaan S_x *up* dan keadaan S_{xy} *up* dalam basis keadaan eigen operator $\hat{S}_z$. Diperoleh:[5]

$$P = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & e^{-i\phi/2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}\right|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\phi) = \cos^2\frac{\phi}{2} . \tag{34}$$

B. Interaksi spin $\frac{1}{2}$ dan medan magnetik

Pada bagian ini kita lihat interaksi spin dan medan magnetik. Sebagai contoh, dipilih elektron, yang diketahui berspin $\frac{1}{2}$, dengan massa m_e, dan muatan $-e$.

Partikel bermuatan listrik yang bergerak melingkar memiliki momen magnetik, sebanding dengan momentum angularnya. Spin merupakan momentum angular intrinsik partikel, sehingga partikel bermuatan listrik dengan spin tidak sama dengan nol memiliki momen magnetik intrinsik. Momen magneik intrinsik elektron diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{M} = -\frac{eg}{2m_e}\mathbf{S} , \tag{35}$$

sehingga operatornya menjadi:

$$\hat{\mathbf{M}} = -\frac{eg}{2m_e}\hat{\mathbf{S}} = -\frac{eg\hbar}{4m_e}\boldsymbol{\sigma} , \tag{36}$$

dengan $g \approx 2$ adalah faktor giromagnetik. Momen magnetik $\mathbf{M}$ itu berinteraksi dengan medan magnetik luar $\mathbf{B}$, memberikan tambahan energi potensial sistem. Jika kita amati dinamika elektron khusus akibat interaksi $\mathbf{M}$ dan $\mathbf{B}$, kita ambil hamiltonian yang hanya berisi interaksi tersebut:[6]

$$H = -\hat{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{B} = \frac{eg\hbar}{4m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} . \tag{37}$$

[5] Keadaan $|+\rangle_x$ dalam basis $|\lambda\rangle_z$ dapat kita cari dengan menyelesaikan persamaan nilai eigen untuk operator $\hat{S}_x$. Namun, dari hasil yang diperoleh di Eq. (31), kita dapat lakukan secara lebih cepat. Jika kita set $\phi = 0$, maka sesuai dengan Eq. (27), Eq. (31) menyatakan keadaan eigen untuk $\hat{S}_x$. Jadi, keadaan $|+\rangle_x$ dalam basis $|\lambda\rangle_z$ adalah:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} . \tag{33}$$

[6] Sebagai contoh, untuk elektron yang terlokalisasi pada kisi kristal suatu bahan, fenomena yang teramati ketika dikenakan medan magnetik pada bahan itu muncul akibat interaksi spin dan medan magnetik, sehingga hamiltonian yang diperlukan untuk menjelaskan atau menganalisis fenomena tersebut adalah seperti yang ditunjukkan di Eq. (37).

Persamaan Schrödinger bergantung waktu untuk sistem atau proses tersebut adalah sebagai berikut:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{eg\hbar}{4m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}|\psi(t)\rangle\,. \tag{38}$$

dengan $|\psi(t)\rangle$ menyatakan keadaan spin sistem.

Kita pilih medan magnetik konstan $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, maka persamaan Schrödinger menjadi:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{eg\hbar B}{4m_e}\sigma_z|\psi(t)\rangle = \frac{eg\hbar B}{4m_e}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}|\psi(t)\rangle\,. \tag{39}$$

Karena hamiltonian tak bergantung pada waktu secara eksplisit, sistem berada dalam keadaan tunak (*stationary*), faktor waktu hanya menjadi faktor fase, sehingga $|\psi(t)\rangle$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\psi\rangle\,. \tag{40}$$

Jika energi sistem dinyatakan sebagai $E = \hbar\omega$, keadan sistem menjadi:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t}|\psi\rangle\,, \tag{41}$$

dan memenuhi persamaan berikut:

$$\frac{egB}{4m_e}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}|\psi\rangle = \omega|\psi\rangle\,. \tag{42}$$

Kita dapat selesaikan Eq. (42) untuk mendapatkan keadaan dan nilai eigen sistem $|\psi\rangle$ dan ω, namun, kita kenali operator atau matriks di Eq. (42) adalah operator $\hat{S}_z$, sehingga dapat langsung kita nyatakan bahwa keadaan eigen sistem adalah keadaan eigen operator $\hat{S}_z$, dan nilai eigen ω dapat dihitung dengan mudah. Diperoleh:

$$|\psi\rangle_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \omega_+ = \omega_0 \quad \text{dan} \quad |\psi\rangle_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\ \omega_- = -\omega_0\,, \tag{43}$$

dengan:

$$\omega_0 = \frac{egB}{4m_e}\,. \tag{44}$$

Apabila mula-mula keadaan sistem adalah:

$$|\psi(0)\rangle = a|\psi\rangle_+ + b|\psi\rangle_- = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\,, \tag{45}$$

maka pada waktu t keadaan sistem adalah:

$$|\psi(t)\rangle = ae^{-i\omega_+ t}|\psi\rangle_+ + be^{-i\omega_- t}|\psi\rangle_- = a\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-i\omega_0 t} \\ be^{i\omega_0 t} \end{pmatrix}\,. \tag{46}$$

Andaikan mula-mula sistem berada pada keadaan eigen $\hat{S}_x$ dengan nilai eigen $\frac{1}{2}\hbar$. Dengan kata lain, mula-mula spin sistem sejajar sumbu x, searah dengan $\hat{\mathbf{x}}$, atau $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\mathbf{x}}$. Keadaan awal sistem adalah:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Pada waktu t keadaan sistem adalah:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Jika pada waktu t kita ukur nilai S_x, diperoleh:

$$\langle S_x\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t} & e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega_0 t\,, \tag{49}$$

hasil pengukuran nilai S_y memberikan:

$$\langle S_y\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_y|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t} & e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sin 2\omega_0 t\,. \tag{50}$$

Dengan demikian, spin sistem berpresesi di sekitar arah medan magnetik, dengan frekuensi:

$$2\omega_0 = \frac{egB}{2m_e} = g\omega_c\,, \quad \omega_c = \frac{eB}{2m_e}\,, \tag{51}$$

dengan ω_c disebut frekuensi siklotron (*cyclotron frequency*).

Jika mula-mula spin sistem sejajar sumbu z, searah dengan $\hat{\mathbf{z}}$, atau $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\mathbf{z}}$, berarti keadaan awal sistem adalah:

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Pada waktu t keadaan sistem adalah:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Jelas bahwa arah spin tidak berubah. Hal yang sama berlaku apabila mula-mula $\hat{\mathbf{S}} = -\frac{1}{2}\hbar\hat{\mathbf{z}}$, yaitu arah spin tidak berubah. Dapat disimpulkan secara umum bahwa jika arah spin membentuk sudut dengan arah medan magnetik, maka spin berpresesi di sekitar arah medan magnetik, yaitu komponen spin yang sejajar arah medan magnetik tetap, sedangkan komponen spin yang tegak lurus arah medan magnetik berputar di sekitar arah medan magnetik dengan frekuensi $g\omega_c$.[7] Hal serupa berlaku untuk sembarang momentum angular, tidak hanya spin.

[7]Presesi spin di sekitar arah medan magnetik dapat ditunjukkan secara lebih jelas jika dikerjakan dalam gambar Heisenberg (Heisenberg *picture*). Dalam gambar Heisenberg dilihat perubahan operator, dalam hal ini operator spin $\hat{\mathbf{S}}$, terhadap waktu, yaitu:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{S}}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, \hat{\mathbf{S}}(t)]\,. \tag{54}$$

C. Metode resonansi paramagnetik

Fenomena presesi spin di sekitar arah medan magnetik dapat dimanfaatkan untuk mengukur nilai faktor giromagnetik g yang berlaku untuk suatu bahan. Pengukuran g tersebut dilakukan dengan metode resonansi paramagnetik. Gambaran singkatnya, bahan ditempatkan dalam medan magnetik konstan, sebut saja $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$, kemudian diukur frekuensi presesi spin di sekitar arah medan magnetik tersebut. Sesuai Eq. (51), dari frekuensi tersebut dapat diketahui nilai g.

Komponen spin pada bidang xy, sebut saja $\mathbf{S}_{xy}$, berpresesi di sekitar arah $\mathbf{B}_0$. Jika diberikan medan magnetik lain yang lebih kecil, sebut saja $\mathbf{B}_1$, dengan arah tegak lurus arah $\mathbf{B}_0$ (arah $\mathbf{B}_1$ pada bidang xy), maka $\mathbf{S}_{xy}$ berinteraksi dengan $\mathbf{B}_1$, dengan hamiltonian, sebut saja H_1, sebagai berikut:

$$H_1 = \frac{eg}{2m_e}\hat{\mathbf{S}}_{xy} \cdot \mathbf{B}_1 \ , \quad (\hat{\mathbf{S}}_{xy}\,\text{adalah operator}\,\mathbf{S}_{xy})\,. \tag{58}$$

Dalam interaksi yang digambarkan Eq. (58) terdapat 2 keadaan eigen, yaitu kita sebut saja keadaan *up* dengan $\mathbf{S}_{xy}$ searah $\mathbf{B}_1$ dan keadaan *down* dengan $\mathbf{S}_{xy}$ berlawanan arah terhadap $\mathbf{B}_1$. Keadaan *up* memiliki energi lebih tinggi dari keadaan *down*. Sesuai sifat alam, sistem cenderung memilih keadaan dengan energi lebih rendah, yaitu keadaan *down*. Jika sistem menempati keadaan *up*, maka sistem bertransisi ke keadaan *down*. Dengan kata lain, arah spin berubah menjadi berlawanan terhadap arah $\mathbf{B}_1$. Pada transisi ini dilepaskan energi berupa radiasi elektromanetik, yang dapat dideteksi. Mengingat arah $\mathbf{S}_{xy}$ berotasi, arah $\mathbf{B}_1$ juga harus berotasi mengikuti rotasi arah $\mathbf{S}_{xy}$, sehingga transisi keadaan dapat terjadi. Keadaan resonansi terjadi ketika frekuensi rotasi arah $\mathbf{B}_1$ sama dengan frekuensi rotasi arah $\mathbf{S}_{xy}$, sehingga $\mathbf{S}_{xy}$ relatif diam terhadap $\mathbf{B}_1$, dan transisi keadaan sangat berpeluang terjadi. Dengan demnikian,

---

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{S}}(t) &= \frac{i}{\hbar}[-\gamma\hat{\mathbf{S}}(t)\cdot\mathbf{B},\hat{\mathbf{S}}(t)] \ , \quad \left(\gamma = \frac{-eg}{2m_e}\right) \\
&= -\frac{i\gamma}{\hbar}[\hat{S}_x(t)B_x + \hat{S}_y(t)B_y + \hat{S}_z(t)B_z, \hat{\mathbf{S}}(t)] && (55) \\
\to \frac{d}{dt}\hat{S}_x(t) &= -\frac{i\gamma}{\hbar}[\hat{S}_x(t)B_x + \hat{S}_y(t)B_y + \hat{S}_z(t)B_z, \hat{S}_x(t)] \\
&= -\frac{i\gamma}{\hbar}\left([\hat{S}_x(t),\hat{S}_x(t)]B_x + [\hat{S}_y(t),\hat{S}_x(t)]B_y + [\hat{S}_z(t),\hat{S}_x(t)]B_z\right) \\
&= -\frac{i\gamma}{\hbar}\left(-i\hbar\hat{S}_z(t)B_y + i\hbar\hat{S}_y(t)B_z\right) \\
&= \gamma\left(\hat{S}_y(t)B_z - \hat{S}_z(t)B_y\right) \\
&= \gamma\left(\hat{\mathbf{S}}(t)\times\mathbf{B}\right)_x && (56) \\
\to \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{S}}(t) &= \gamma\left(\hat{\mathbf{S}}(t)\times\mathbf{B}\right) . && (57)
\end{aligned}$$

Persamaan (57) menunjukkan presesi spin di sekitar arah medan magnetik. Ingat bahwa γ bernilai plus untuk muatan positif, dan negatif untuk muatan negatif, sehingga arah presesi pada kasus muatan negatif berlawanan terhadap arah presesi pada kasus muatan positif.

keadaan resonansi ditandai dengan radiasi yang dideteksi sangat kuat mencapai puncaknya. Dari keadaan resonansi ini pula diketahui frekuensi presesi spin $\mathbf{S}$ di sekitar arah $\mathbf{B}_0$, sehingga nilai g dapat ditentukan.

Menyiapkan medan magnetik $\mathbf{B}_1$ yang arahnya berotasi tidak mudah. Sebagai gantinya, dipakai $\mathbf{B}_1$ yang berosilasi pada satu sumbu, misalkan x. Osilasi dapat dianggap sebagai superposisi dua rotasi dengan frekuensi sama dan arah berlawanan. Dengan demikian, pada saat yang sama ada rotasi arah $\mathbf{B}_1$ yang searah dengan dan yang berlawanan terhadap rotasi arah $\mathbf{S}_{xy}$. Rotasi arah $\mathbf{B}_1$ yang searah dengan rotasi arah $\mathbf{S}_{xy}$ menghasilkan transisi keadaan yang diinginkan, sedangkan rotasi arah $\mathbf{B}_1$ yang berlawanan terhadap rotasi arah $\mathbf{S}_{xy}$ menghasilkan efek yang rata-ratanya nol.

Kini, kita masuk ke perhitungan. Sistem berada dalam pengaruh medan magnetik $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$ dan $\mathbf{B}_1 = B_1 \cos\omega t\, \hat{\mathbf{x}}$, dengan $B_0 > B_1$. Persamaan Schrödinger untuk proses ini adalah:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= \frac{eg\hbar}{4m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1)|\psi(t)\rangle \\ &= \frac{eg\hbar}{4m_e}(B_0\sigma_z + B_1\cos\omega t\,\sigma_x)|\psi(t)\rangle\,, \end{aligned} \tag{59}$$

sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} &= \frac{eg}{4m_e}\begin{pmatrix} B_0 & B_1\cos\omega t \\ B_1\cos\omega t & -B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1\cos\omega t \\ \omega_1\cos\omega t & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}\,,\ \left(\omega_0 = \frac{egB_0}{4m_e}\,,\ \omega_1 = \frac{egB_1}{4m_e}\right) \end{aligned} \tag{60}$$

atau sepasang persamaan terkopel:

$$i\frac{d}{dt}a(t) = \omega_0 a(t) + \omega_1\cos\omega t\, b(t) \tag{61}$$

$$i\frac{d}{dt}b(t) = \omega_1\cos\omega t\, a(t) - \omega_0 b(t)\,. \tag{62}$$

Kita lakukan beberapa hal berikut pada Eqs. (61) dan (62) :

$$\begin{aligned} e^{i\omega_0 t} i\frac{d}{dt}a(t) &= \omega_0 a(t)e^{i\omega_0 t} + \omega_1\cos\omega t\, b(t)e^{i\omega_0 t} \\ \to -a(t)i\frac{d}{dt}e^{i\omega_0 t} + a(t)i\frac{d}{dt}e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}i\frac{d}{dt}a(t) &= \omega_0 a(t)e^{i\omega_0 t} + \omega_1\cos\omega t\, b(t)e^{i\omega_0 t} \\ \to \omega_0 a(t)e^{i\omega_0 t} + i\frac{d}{dt}\left(a(t)e^{i\omega_0 t}\right) &= \omega_0 a(t)e^{i\omega_0 t} + \omega_1\cos\omega t\, b(t)e^{i\omega_0 t} \\ \to i\frac{d}{dt}\left(a(t)e^{i\omega_0 t}\right) &= \omega_1\cos\omega t\, b(t)e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_0 t} i\frac{d}{dt}b(t) &= \omega_1\cos\omega t\, a(t)e^{-i\omega_0 t} - \omega_0 b(t)e^{-i\omega_0 t} \\ \to -b(t)i\frac{d}{dt}e^{-i\omega_0 t} + b(t)i\frac{d}{dt}e^{-i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}i\frac{d}{dt}b(t) &= \omega_1\cos\omega t\, a(t)e^{-i\omega_0 t} - \omega_0 b(t)e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\to -\omega_0 b(t)e^{-i\omega_0 t} + i\frac{d}{dt}\left(b(t)e^{-i\omega_0 t}\right) = \omega_1 \cos\omega t\, a(t)e^{-i\omega_0 t} - \omega_0 b(t)e^{-i\omega_0 t}\\
&\to i\frac{d}{dt}\left(b(t)e^{-i\omega_0 t}\right) = \omega_1 \cos\omega t\, a(t)e^{-i\omega_0 t}\,. \qquad (64)
\end{aligned}$$

Jika didefinisikan:

$$A(t) = a(t)e^{i\omega_0 t} \qquad \text{dan} \qquad B(t) = b(t)e^{-i\omega_0 t}\,, \qquad (65)$$

maka Eqs. (63) dan (64) menjadi:

$$i\frac{d}{dt}A(t) = \omega_1 B(t)\cos\omega t\, e^{2i\omega_0 t} \qquad (66)$$

$$i\frac{d}{dt}B(t) = \omega_1 A(t)\cos\omega t\, e^{-2i\omega_0 t}\,. \qquad (67)$$

Kita tertarik pada keadaan resonansi, yaitu $\omega = 2\omega_0$. Pada keadaan resonansi:

$$\cos\omega t\, e^{\pm 2i\omega_0 t} = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)e^{\pm 2i\omega_0 t} = \frac{1}{2}\left(e^{\pm i(2\omega_0+\omega)t} + e^{\pm i(2\omega_0-\omega)t}\right) \approx \frac{1}{2}e^{\pm i(2\omega_0-\omega)t}\,, \qquad (68)$$

karena suku pertama sangat berosilasi dengan frekuensi $\approx 4\omega_0$, sehingga kontribusi rata-ratanya nol. Kini Eqs. (66) dan (67) menjadi:

$$i\frac{d}{dt}A(t) \approx \frac{1}{2}\omega_1 B(t)e^{i(2\omega_0-\omega)t} \qquad (69)$$

$$i\frac{d}{dt}B(t) \approx \frac{1}{2}\omega_1 A(t)e^{-i(2\omega_0-\omega)t}\,. \qquad (70)$$

Kita turunkan Eq. (69) terhadap waktu, diperoleh:

$$\begin{aligned}
i\frac{d^2}{dt^2}A(t) &\approx \frac{1}{2}\omega_1\frac{d}{dt}\left(B(t)e^{i(2\omega_0-\omega)t}\right)\\
&\approx \frac{1}{2}i\omega_1(2\omega_0-\omega)B(t)e^{i(2\omega_0-\omega)t} + \frac{1}{2}\omega_1 e^{i(2\omega_0-\omega)t}\frac{d}{dt}B(t)\\
&= i(2\omega_0-\omega)i\frac{d}{dt}A(t) - i\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 A(t)\\
\to \frac{d^2}{dt^2}A(t) &= (2\omega_0-\omega)i\frac{d}{dt}A(t) - \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 A(t)\,. \qquad (71)
\end{aligned}$$

Dicoba $A(t) = A(0)e^{i\Omega t}$ pada Eq. (71), dan diperoleh persamaan kuadrat dalam Ω:

$$\begin{aligned}
&-\Omega^2 A(t) = -(2\omega_0-\omega)\Omega A(t) - \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 A(t)\\
&\to \Omega^2 - (2\omega_0-\omega)\Omega - \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 = 0\,, \qquad (72)
\end{aligned}$$

dengan solusi:

$$\Omega_\pm = \left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2}\,. \qquad (73)$$

Dengan demikian, solusi umum untuk $A(t)$ adalah:

$$A(t) = A_+ e^{i\Omega_+ t} + A_- e^{i\Omega_- t}\,. \qquad (74)$$

Jika $A(t)$ di Eq. (74) dimasukkan ke Eq. (69) dan diset $\omega = 2\omega_0$ (keadaan resonansi), diperoleh:

$$B(t) = -\frac{2}{\omega_1}\left(\Omega_+ A_+ e^{i\Omega_+ t} + \Omega_- A_- e^{i\Omega_- t}\right)\,. \qquad (75)$$

Dengan demikian, sesuai Eq. (65), keadaan sistem dinyatakan sebagai:

$$\left(\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A(t)e^{-i\omega_0 t} \\ B(t)e^{i\omega_0 t} \end{array}\right), \tag{76}$$

dengan $A(t)$ diberikan di Eq. (74) dan $B(t)$ di Eq. (75) untuk keadaan resonansi.

Transisi keadaan sangat berpeluang terjadi pada keadaan resonansi, jadi kita akan gunakan Eqs. (74), (75), dan (76). Pada transisi keadaan terjadi perubahan keadaan dari keadaan awal, yaitu *up*, ke keadaan akhir, yaitu *down*, yang berarti arah spin berubah. Kini bayangkan, jika arah spin berubah, maka perubahan terjadi pada setiap komponennya, baik komponen pada sumbu z maupun pada bidang xy. Dengan demikian melihat transisi keadaan spin pada bidang xy dapat juga dilakukan dengan melihat transisi keadaan spin pada sumbu z. Anggaplah mula-mula sistem berada pada keadaan spin S_z *up*, berarti sesuai Eq. (76):

$$\left(\begin{array}{c} a(0) \\ b(0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A(0) \\ B(0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right), \tag{77}$$

sehingga sesuai Eqs. (74) dan (75) diperoleh:

$$A(0) = A_+ + A_- = 1 \qquad \text{dan} \qquad -\frac{\omega_1}{2}B(0) = \Omega_+ A_+ + \Omega_- A_- = 0\,, \tag{78}$$

dan pada akhirnya didapatkan:

$$A_+ = \frac{\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+} \qquad \text{dan} \qquad A_- = -\frac{\Omega_+}{\Omega_- - \Omega_+}\,, \tag{79}$$

Kini kita hitung peluang mendapatkan sistem pada waktu t berada pada keadaan spin S_z *down*. Jika peluang itu besar, berarti terjadi transisi ke keadaan spin S_z *down*. Secara khusus kita ingin melihatnya pada keadaan resonansi.

$$\begin{aligned}
P_-(t) &= \left|\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right)\right|^2 \\
&= |b(t)|^2 \\
&= |B(t)|^2 \\
&= \frac{4}{\omega_1^2}\left|\Omega_+ A_+ e^{i\Omega_+ t} + \Omega_- A_- e^{i\Omega_- t}\right|^2 \\
&= \frac{4}{\omega_1^2}\left|\frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+}e^{i\Omega_+ t} - \frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+}e^{i\Omega_- t}\right|^2 \\
&= \frac{4}{\omega_1^2}\left(\frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+}\right)^2\left|e^{i\Omega_+ t} - e^{i\Omega_- t}\right|^2 \\
&= \frac{4}{\omega_1^2}\left(\frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+}\right)^2\left(2 - e^{i(\Omega_- - \Omega_+)t} - e^{-i(\Omega_- - \Omega_+)t}\right) \\
&= \frac{8}{\omega_1^2}\left(\frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+}\right)^2\left(1 - \cos(\Omega_- - \Omega_+)t\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{(2\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \left(1 - \cos \sqrt{(2\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}\, t \right) . \tag{80}$$

Persamaan (80) menunjukkan bahwa pada keadaan bukan resonansi peluang transisi kecil, mengingat $\omega_1 < \omega_0$, sedangkan pada keadaan resonansi $\omega = 2\omega_0$, sehingga:

$$\Omega_{\pm} = \pm \frac{\omega_1}{2} , \tag{81}$$

dan nilai peluang memiliki orde 1:

$$P_{-,res}(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \omega_1 t \right) . \tag{82}$$