Catatan Mekanika Kuantum 2

Interaksi Partikel Bermuatan dengan Medan Elektromagnetik (lanjutan)

Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 16, Subbab 3 – 6

Pada catatan sebelum ini telah diperoleh persamaan Schrödinger tak bergantung waktu untuk proses dengan potensial elektromagnetik konstan sebagai berikut:

$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{1}$$

Berikut ini kita lihat beberapa contoh proses seperti itu.

E. Gerak partikel bermuatan dalam medan magnetik uniform dan konstan

Pada proses ini tidak ada medan listrik, sehingga suku dengan potensial skalar $\phi(\mathbf{r})$ pada Eq. (1) tidak ada, dan persamaan Schrödinger menjadi:

$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{2}$$

Medan magnetik uniform dan konstan, sehingga $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}$. Perhatikan, meskipun medan magnetik tidak bergantung pada posisi, ini tidak berarti potensial vektor juga tidak bergantung pada posisi, sehingga potensial vektor tetap dinyatakan sebagai $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Sesuai invariansi tera medan magnetik, ada banyak pilihan potensial vektor. Dipilih potensial vektor yang memudahkan perhitungan, dalam contoh ini yaitu:[1]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{B}\,. \tag{5}$$

[1]Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ di Eq. (5) memenuhi definisi potensial vektor, yaitu:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\,. \tag{3}$$

Supaya mudah, anggap saja sumbu z sejajar medan magnetik, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$, maka:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{B}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{r} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{B}\right]\,,\ (\boldsymbol{\nabla}\,\text{bekerja pada}\,\mathbf{B}\,\text{dan}\,\mathbf{r}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\mathbf{r}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{r} - \mathbf{B}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{B}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{r} - \mathbf{B}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r})\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[B\frac{\partial}{\partial z}\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right) - B\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[B\hat{\mathbf{k}} - 3B\hat{\mathbf{k}}\right] \\
&= \mathbf{B}\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Jika dipilih sumbu z searah $\mathbf{B}$, sehingga $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$, maka suku di Eq. (2) yang linier dalam $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ menjadi:

$$\begin{aligned}
-\frac{iq\hbar}{2m}(\mathbf{r}\times\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r}) &= \frac{iq\hbar}{2m}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r}) \\
&= \frac{iq\hbar}{2m}\mathbf{B}\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\,\psi(\mathbf{r}) \\
&= -\frac{q}{2m}\mathbf{B}\cdot(-i\hbar\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\,\psi(\mathbf{r}) \\
&= -\frac{q}{2m}\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}\psi(\mathbf{r}) \\
&= -\frac{qB}{2m}L_z\psi(\mathbf{r})\,,
\end{aligned} \tag{6}$$

dan suku yang kuadratik dalam $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{q^2}{8m}(\mathbf{r}\times\mathbf{B})^2\,\psi(\mathbf{r}) &= \frac{q^2}{8m}\left(\hat{\mathbf{i}}yB - \hat{\mathbf{j}}xB\right)^2\psi(\mathbf{r}) \\
&= \frac{q^2B^2}{8m}\left(x^2+y^2\right)\psi(\mathbf{r})\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Sampai di sini kita dapat memahami secara kualitatif gerak partikel bermuatan dalam medan magnetik uniform konstan. Suku kuadratik dalam $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ di Eq. (7) merepresentasikan osilasi harmonik 2 dimensi pada bidang xy, yang berarti gerak melingkar pada bidang xy. Operator L_z di suku linier dalam $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ di Eq. (6) komut dengan kuadrat operator momentum linier di suku pertama Eq. (2), yang direpresentasikan oleh $\boldsymbol{\nabla}^2$, dan juga komut dengan x^2+y^2 di suku kuadratik dalam $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ di Eq. (7). Dengan demikian, L_z komut dengan hamiltonian H. Ini berarti, $\psi_{m_l}(\mathbf{r})$ merupakan fungsi eigen bersama H dan L_z, dan komponen z momentum angular orbital merupakan konstanta gerak, nilainya tetap, yaitu:

$$L_z\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = \hbar m_l\psi_{m_l}(\mathbf{r})\,, \tag{8}$$

dengan m_l bernilai bulat, baik positif maupun negatif. (Perhatikan bahwa telah ditambahkan label m_l pada fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r})$.) Jadi, proyeksi gerak partikel pada bidang xy berupa gerak melingkar konstan. Dalam hamiltonian di Eq. (2) tidak ada interaksi atau potensial yang bergantung pada z, sehingga gerak partikel pada sumbu z merupakan gerak linier konstan. Jadi, secara keseluruhan gerak partikel bermuatan dalam medan magnetik uniform konstan $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ merupakan gabungan gerak melingkar konstan pada bidang xy dan gerak linier konstan pada sumbu z. Lintasan partikel yang bergerak seperti itu berbentuk heliks.

Kita lanjutkan perhitungan untuk mendapatkan energi dan fungsi gelombang partikel. Dengan memasukkan Eqs. (6), (7), dan (8) ke Eq. (2), persamaan Schrödinger menjadi sebagai berikut:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{qB\hbar m_l}{2m} + \frac{q^2B^2}{8m}\left(x^2+y^2\right)\right]\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = E\psi_{m_l}(\mathbf{r})\,. \tag{9}$$

Koordinat yang baik dipakai untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger (9) adalah koordinat silinder ρ, ϕ, z. Dalam koordinat silinder:

$$x = \rho\cos\phi \tag{10}$$

$$y = \rho \sin \phi \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{12}$$

dan persamaan Schrödinger (9) diperoleh sebagai berikut:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{qB\hbar m_l}{2m} + \frac{q^2B^2}{8m}\rho^2\right)\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = E\psi_{m_l}(\mathbf{r})\,. \tag{13}$$

Kita ingat bahwa:

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}\,, \tag{14}$$

sehingga persamaan Schrödinger dapat dinyatakan sebagai berikut, dengan menerapkan Eq. (8):

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2m\rho^2}L_z^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{qB\hbar m_l}{2m} + \frac{q^2B^2}{8m}\rho^2\right)\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = E\psi_{m_l}(\mathbf{r}) \\
\rightarrow &\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hbar^2 m_l^2}{2m\rho^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{qB\hbar m_l}{2m} + \frac{q^2B^2}{8m}\rho^2\right)\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = E\psi_{m_l}(\mathbf{r})\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Kita dapatkan persamaan differensial berikut:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{q^2B^2}{4\hbar^2}\rho^2 - \frac{m_l^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_{m_l}(\mathbf{r}) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{qB\hbar m_l}{\hbar^2}\right)\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{16}$$

Dari persamaan Schrödinger di atas kita lihat bahwa kebergantungan hamiltonian pada ϕ hanya ada di L_z, sehingga kebergantungan $\psi_{m_l}(\mathbf{r})$ pada ϕ hanya ditentukan oleh persamaan eigenvalue Eq. (8), dengan L_z diberikan di Eq. (14), yang menghasilkan:

$$\psi_{m_l}(\mathbf{r}) = v_{m_l}(\rho, z)e^{im_l\phi}\,. \tag{17}$$

Setelah $\psi_{m_l}(\mathbf{r})$ di Eq. (17) dimasukkan ke Eq. (16), diperoleh persamaan differensial untuk $v_{m_l}(\rho, z)$ sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{q^2B^2}{4\hbar^2}\rho^2 - \frac{m_l^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_{m_l}(\rho, z) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{qB\hbar m_l}{\hbar^2}\right)v_{m_l}(\rho, z) = 0\,, \tag{18}$$

Dengan menggunakan teknik separasi variabel, kita coba:

$$v_{m_l}(\rho, z) = f_{m_l}(\rho)g(z)\,, \tag{19}$$

dan diperoleh:

$$\frac{1}{f_{m_l}(\rho)}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{q^2B^2}{4\hbar^2}\rho^2 - \frac{m_l^2}{\rho^2}\right)f_{m_l}(\rho) + \frac{1}{g(z)}\frac{d^2}{dz^2}g(z) + \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{qB\hbar m_l}{\hbar^2} = 0 \tag{20}$$

Fungsi $g(z)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{1}{g(z)}\frac{d^2}{dz^2}g(z) = -k^2 = \text{konstan} \rightarrow g(z) = e^{ikz}\,, \tag{21}$$

sehingga fungsi $f_{m_l}(\rho)$ memenuhi persamaan berikut:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{q^2B^2}{4\hbar^2}\rho^2 - \frac{m_l^2}{\rho^2}\right)f_{m_l}(\rho) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{qB\hbar m_l}{\hbar^2} - k^2\right)f_{m_l}(\rho) = 0\,. \tag{22}$$

Untuk menyederhanakan persamaan tersebut, dilakukan perubahan variabel dari ρ ke ξ menurut:

$$\xi = \sqrt{\frac{|q|B}{2\hbar}}\rho\,, \tag{23}$$

dan diperoleh:

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} - \xi^2 - \frac{m_l^2}{\xi^2}\right) f_{m_l}(\xi) + \lambda f_{m_l}(\xi) = 0\,, \tag{24}$$

dengan

$$\lambda = \frac{4m}{|q|B\hbar}\left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) + 2m_l\frac{q}{|q|}\,. \tag{25}$$

Kini, kita lihat $f_{m_l}(\xi)$ di daerah ξ besar dan ξ kecil. Untuk $\xi \to \infty$, Eq. (24) menjadi:

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2\right) f_{m_l}(\xi) \approx 0\,, \tag{26}$$

sehingga diperoleh $f_{m_l}(\xi)$ yang memenuhi syarat fisis ($f_{m_l}(\xi) \to 0$ jika $\xi \to \infty$):[2]

$$f_{m_l}(\xi) \sim e^{-\xi^2/2}\,. \tag{27}$$

Untuk $\xi \to 0$, Eq. (24) menjadi:

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} - \frac{m_l^2}{\xi^2}\right) f_{m_l}(\xi) \approx 0\,, \tag{28}$$

sehingga diperoleh $f_{m_l}(\xi)$ yang memenuhi syarat fisis ($f_{m_l}(\xi) \nrightarrow \infty$ jika $\xi \to 0$):[3]

$$f_{m_l}(\xi) \sim \xi^{|m_l|}\,. \tag{29}$$

Jadi, untuk sembarang nilai ξ diperoleh:

$$f_{m_l}(\xi) = \xi^{|m_l|} G(\xi) e^{-\xi^2/2}\,. \tag{30}$$

Setelah $f_{m_l}(\xi)$ di Eq. (30) dimasukkan ke Eq. (24), diperoleh persamaan untuk $G(\xi)$ sebagai berikut:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}G(\xi) + \left(\frac{2|m_l|+1}{\xi} - 2\xi\right)\frac{d}{d\xi}G(\xi) + (\lambda - 2 - 2|m_l|)\,G(\xi) = 0\,. \tag{31}$$

Jika variabel dalam persamaan tersebut diganti menurut:

$$\zeta = \xi^2\,, \tag{32}$$

diperoleh persamaan untuk $G(\zeta)$:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}G(\zeta) + \left(\frac{|m_l|+1}{\zeta} - 1\right)\frac{d}{d\zeta}G(\zeta) + \frac{\lambda - 2 - 2|m_l|}{4\zeta}G(\zeta) = 0\,. \tag{33}$$

[2]Solusi lain adalah $e^{\xi^2/2}$, yang bernilai tak berhingga pada $\xi \to \infty$.

[3]Perhatikan bahwa m_l dapat bernilai negatif. Jika $m_l < 0$, maka $\xi^{m_l} = \xi^{-|m_l|}$ singular pada $\xi \to 0$. Karena itu, yang dipakai di Eq. (29) adalah $|m_l|$.

Fungsi $G(\zeta)$ dicari dengan menggunakan solusi deret:

$$G(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \,, \tag{34}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k\zeta^{k-2} + \left(\frac{|m_l|+1}{\zeta} - 1\right)\sum_{k=0}^{\infty} k a_k \zeta^{k-1} + \frac{\lambda - 2 - 2|m_l|}{4}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^{k-1} = 0 \\
\to &\sum_{k=0}^{\infty} k(k+|m_l|)a_k\zeta^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda - 2 - 2|m_l| - 4k}{4} a_k\zeta^{k-1} = 0 \\
\to &\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)(s+1+|m_l|)a_{s+1}\zeta^{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda - 2 - 2|m_l| - 4k}{4} a_k\zeta^{k-1} = 0 \,, \; (k-1 = s) \\
\to &\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+1+|m_l|)a_{k+1} + \frac{\lambda - 2 - 2|m_l| - 4k}{4} a_k\right]\zeta^{k-1} = 0 \,,
\end{aligned} \tag{35}$$

dan didapatkan relasi rekursi:

$$a_{k+1} = \frac{4k + 2|m_l| + 2 - \lambda}{4(k+1)(k+1+|m_l|)} a_k \,. \tag{36}$$

Deret di persamaan (34) harus berhenti di suatu suku tertentu $k = n_r < \infty$, sehingga tidak terjadi $G(\zeta) \to \infty$ ketika $\zeta \to \infty$. Jadi, sesuai relasi rekursi (36):

$$4n_r + 2|m_l| + 2 - \lambda = 0 \to \lambda = 4n_r + 2|m_l| + 2 = \text{ bilangan bulat} \,. \tag{37}$$

Persamaan (33) menjadi:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}G(\zeta) + \left(\frac{|m_l|+1}{\zeta} - 1\right)\frac{d}{d\zeta}G(\zeta) + \frac{n_r}{\zeta}G(\zeta) = 0 \,, \tag{38}$$

dengan $G(\zeta)$ polinomial Laguerre terasosiasi (*associated Laguerre polynomials*):

$$G(\zeta) = L_{n_r}^{|m_l|}(\zeta) \,. \tag{39}$$

Sesuai definisi λ di persamaan (25), energi diperoleh sebagai berikut:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|q|B\hbar}{2m}\left(2n_r + |m_l| + 1 - m_l\frac{q}{|q|}\right) \,. \tag{40}$$

Suku pertama energi di Eq. (40) adalah untuk gerak partikel di sepanjang sumbu z, sehingga energi untuk gerak partikel pada bidang xy, yang merupakan gerak rotasi, adalah:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{|q|B\hbar}{2m}\left(2n_r + |m_l| + 1 - m_l\frac{q}{|q|}\right) \,. \tag{41}$$

Energi rotasi partikel pada bidang xy tentu saja bergantung pada momentum angular orbital, dengan kata lain, pada m_l. Dengan demikian, suku yang mengandung m_l di Eq. (41) tidak boleh saling menghilangkan. Jadi, untuk muatan positif, $q = |q|$, berlaku:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{|q|B\hbar}{2m}(2n_r + |m_l| + 1 - m_l) \to m_l < 0 \,, \, \hat{\mathbf{L}}_z = -\hat{\mathbf{z}} \,, \tag{42}$$

sedangkan untuk untuk muatan negatif, $q = -|q|$, berlaku:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{|q|B\hbar}{2m}\left(2n_r + |m_l| + 1 + m_l\right) \rightarrow m_l > 0\,,\ \hat{\mathbf{L}}_z = \hat{\mathbf{z}}\,; \tag{43}$$

jenis muatan listrik menentukan arah rotasi (arah belok) partikel dalam medan magnetik. Energi rotasi partikel pada bidang xy adalah:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{|q|B\hbar}{m}\left(n_r + |m_l| + \frac{1}{2}\right)\,, \tag{44}$$

tidak bergantung pada arah rotasi. Mengingat satuan energi osilasi harmonik adalah $\hbar\omega$, dengan ω adalah frekuensi osilasi, maka diperoleh:

$$\omega = \frac{|q|B}{m}\,. \tag{45}$$

Kini, kita bandingkan hasil perhitungan mekanika kuantum di atas dengan hasil perhitungan mekanika klasik. Menurut prinsip korespondensi (ingat kembali Mekanika Kuantum 1), pada limit tertentu, disebut limit klasik, mekanika kuantum memberikan hasil yang sesuai dengan mekanika klasik, yang berlaku untuk proses makroskopik. Mengenai energi rotasi partikel di Eq. (44), supaya diperoleh nilai yang makroskopik, nilai $n_r + |m_l| + \frac{1}{2}$ harus sangat besar, mengingat $\hbar$ bernilai sangat kecil. Apabila dipilih n_r sangat besar, maka $L_{n_r}^{|m_l|}(\zeta)$ menjadi sebuah fungsi yang sangat berosilasi, yang berarti posisi partikel menjadi sangat tidak pasti, tidak seperti yang dijumpai dalam mekanika klasik, sehingga kita tidak ambil keadaan dengan n_r sangat besar. Sebagai alternatif, dipilih keadaan dengan $|m_l|$ sangat besar, sehingga $n_r + |m_l| + \frac{1}{2} \simeq |m_l|$, dan energi rotasi partikel menjadi:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{|q|B}{m}\hbar|m_l|\,. \tag{46}$$

Menurut mekanika klasik, energi rotasi partikel diperoleh sebagai berikut. Sesuai dengan yang telah disampaikan dalam catatan sebelum ini, yang merupakan besaran fisika momentum linier dalam proses ini adalah $\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})$, sehingga besaran fisika momentum angular orbital adalah $\mathbf{r} \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))$. Komponen z besaran fisika momentum angular orbital adalah (ingat bahwa pada kasus ini $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$):

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{r} \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))\right]_z &= \left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{p} + \frac{q}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}\right)\right]_z \\
&= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z + \frac{q}{2}\left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})\right]_z \\
&= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z + \frac{q}{2}\left[\mathbf{r}\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\right]_z \\
&= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z + \frac{q}{2}\left(\mathbf{r}zB - \mathbf{B}r^2\right)_z \\
&= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z + \frac{q}{2}\left(z^2B - r^2B\right) \\
&= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z - \frac{qB}{2}\left(x^2 + y^2\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{q}{|q|}L_z - \frac{qB}{2}\left(x^2+y^2\right) . \tag{47}$$

Langkah terakhir di Eq. (47) dilakukan untuk membuat arah momentum angular orbital sesuai dengan jenis muatan listrik. Untuk muatan positif, momentum angular orbital dan medan magnetik saling berlawanan arah. Sebaliknya, untuk muatan negatif, momentum angular orbital searah medan magnetik. Besar komponen z besaran fisika momentum angular orbital adalah (tidak bergantung pada jenis muatan):

$$L_z + \frac{|q|B}{2}\left(x^2+y^2\right) = L_z + \frac{|q|B}{2}\rho^2 = \rho m v_t \, , \tag{48}$$

dengan v_t adalah besar kecepatan tangensial dan ρ radius rotasi partikel. Besar gaya sentripetal yang bekerja pada partikel adalah:

$$m\frac{v_t^2}{\rho} = |q\mathbf{v}\times\mathbf{B}| = |q|v_t B \, , \tag{49}$$

sehingga diperoleh:

$$\rho = \frac{mv_t}{|q|B} \, . \tag{50}$$

Jika ρ di Eq. (50) dimasukkan ke Eq. (48), diperoleh energi rotasi partikel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_z + \frac{m^2v_t^2}{2|q|B} &= \frac{m^2v_t^2}{|q|B} \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv_t^2 &= \frac{|q|B}{m}L_z \, . \end{aligned} \tag{51}$$

Kita dapatkan Eqs. (46) dan (51) sesuai, karena $\hbar|m_l|$ merupakan besar L_z.

Berikutnya, kita lihat radius rotasi partikel. Dari Eqs. (50) dan (51) diperoleh radius rotasi partikel menurut mekanika klasik sebagai berikut:

$$\rho = \frac{\sqrt{m^2v_t^2}}{|q|B} = \sqrt{\frac{2L_z}{|q|B}} \, . \tag{52}$$

Untuk dibandingkan dengan perhitungan mekanika klasik, radius rotasi partikel menurut mekanika kuantum dihitung dengan memilih n_r terendah, yaitu $n_r = 0$, karena makin besar n_r, fungsi gelombang makin berosilasi, makin besar pula ketidakpastian posisi partikel. Untuk $n_r = 0$, $G(\zeta) =$ konstan, sehingga:

$$f_{m_l}(\xi) = \xi^{|m_l|}e^{-\xi^2/2} \tag{53}$$

dan rapat peluang mendapatkan partikel menjadi:

$$|f_{m_l}(\xi)|^2 = \xi^{2|m_l|}e^{-\xi^2} \, , \tag{54}$$

yang bernilai maksimum pada $\xi = \xi_0$ berikut ini:

$$\left.\frac{d}{d\xi}|f_{m_l}(\xi)|^2\right|_{\xi=\xi_0} = 2|m_l|\xi_0^{2|m_l|-1}e^{-\xi_0^2} - 2\xi_0\xi_0^{2|m_l|}e^{-\xi_0^2} = 0 \rightarrow \xi_0 = \sqrt{|m_l|} \, . \tag{55}$$

Dari Eq. (23) kita peroleh radius rotasi artikel adalah:

$$\rho = \sqrt{\frac{2\hbar|m_l|}{|q|B}}\,, \tag{56}$$

yang sesuai dengan Eq. (52).

F. Level Landau

Pada contoh sebelum ini, untuk $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}} = (0,0,B)$ dipakai potensial vektor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{B}\\
&= -\frac{B}{2}\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}}\\
&= -\frac{B}{2}(y\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}})\\
&= \frac{B}{2}(-y,x,0)\,.
\end{aligned} \tag{57}$$

Orang juga dapat menggunakan potensial vektor yang sejajar sumbu x ($\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B\alpha\hat{\mathbf{i}} = (B\alpha,0,0)$) atau sejajar sumbu y ($\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B\beta\hat{\mathbf{j}} = (0,B\beta,0)$) untuk mendapatkan medan magnetik yang sama:

$$\begin{aligned}
(0,0,B) &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(B\alpha,0,0)\\
&= \left(0, B\frac{\partial\alpha}{\partial z}, -B\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \to \alpha = -y\ ,\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (-By,0,0)
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
(0,0,B) &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(0,B\beta,0)\\
&= \left(-B\frac{\partial\beta}{\partial z}, 0, B\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \to \beta = x\ ,\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0,Bx,0)\,.
\end{aligned} \tag{59}$$

Transformasi tera pada potensial vektor dari $\frac{B}{2}(-y,x,0)$ ke $(-By,0,0)$ dan dari $\frac{B}{2}(-y,x,0)$ ke $(0,Bx,0)$ adalah:

$$(-By,0,0) = \frac{B}{2}(-y,x,0) - \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)g(\mathbf{r}) \to g(\mathbf{r}) = \frac{Bxy}{2} \tag{60}$$

$$(0,Bx,0) = \frac{B}{2}(-y,x,0) - \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)g(\mathbf{r}) \to g(\mathbf{r}) = -\frac{Bxy}{2}\,. \tag{61}$$

Pada kasus di bagian ini potensial skalar $\phi(\mathbf{r})$ nol dan kita pilih $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = Bx\hat{\mathbf{j}} = (0,Bx,0)$. Persamaan Schrödinger (1) untuk partikel bermassa m dan bermuatan q, yang bergerak dalam medan magnetik $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ menjadi:

$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2iq\hbar Bx\frac{\partial}{\partial y} + q^2B^2x^2\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,, \tag{62}$$

atau dalam operator momentum linier:

$$\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2qBxp_y + q^2B^2x^2\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{63}$$

Hamiltonian di Eq. (62) atau (63) tidak bergantung secara eksplisit pada y dan z, dengan demikian, berlaku $[H, p_y] = 0$, $[H, p_z] = 0$, dan $\psi(\mathbf{r})$ merupakan fungsi eigen bersama H, p_y, dan p_z, yaitu:

$$p_y \psi(\mathbf{r}) = \hbar k_y \psi(\mathbf{r}) \qquad \text{dan} \qquad p_z \psi(\mathbf{r}) = \hbar k_z \psi(\mathbf{r}) \,. \tag{64}$$

Persamaan Schrödinger (63) menjadi:

$$\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \hbar^2 k_y^2 + \hbar^2 k_z^2 - 2qBx\hbar k_y + q^2B^2x^2\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \,. \tag{65}$$

Melihat Eq. (63), kebergantungan $\psi(\mathbf{r})$ pada y dan z masing-masing hanya ditentukan oleh persamaan eigenvalue komponen y dan z momentum linier di Eq. (64). Diperoleh:

$$\psi(\mathbf{r}) = \upsilon(x) e^{ik_y y} e^{ik_z z} \,. \tag{66}$$

Apabila gerak partikel terbatas hanya pada bidang xy, berarti $p_z = 0$ ($k_z = 0$). Dalam hal ini, partikel berada pada keadaan eigen p_z dengan nilai eigen 0. Agar sederhana, kita ubah $k_y \to k$, sehingga:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y) = \upsilon(x) e^{iky} \,, \tag{67}$$

dan Eq. (65) menjadi:

$$\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \hbar^2 k^2 - 2qBx\hbar k + q^2B^2x^2\right]\psi(x, y) = E\psi(x, y) \,. \tag{68}$$

Pada akhirnya kita peroleh persamaan untuk $\upsilon(x)$ sebagai berikut:

$$\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \hbar^2 k^2 - 2qBx\hbar k + q^2B^2x^2\right]\upsilon(x) = E\upsilon(x) \,. \tag{69}$$

Persamaan (69) dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \hbar^2 k^2 - 2qBx\hbar k + q^2B^2x^2\right]\upsilon(x) &= E\upsilon(x) \\
\to \frac{1}{2m}\left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + (qBx - \hbar k)^2\right]\upsilon(x) &= E\upsilon(x) \\
\to \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{q^2B^2}{2m}\left(x - \frac{\hbar k}{qB}\right)^2\right]\upsilon(x) &= E\upsilon(x) \,.
\end{aligned} \tag{70}$$

Persamaan (70) adalah persamaan Schrödinger untuk osilasi harmonik, dengan titik seimbang bukan di $x = 0$, melainkan di:[4]

$$x = \frac{\hbar k}{qB} = \frac{|q|}{q}\frac{\hbar k}{|q|B} = \frac{|q|}{q}x_0 \,, \quad \left(x_0 = \frac{\hbar k}{|q|B}\right) \,, \tag{71}$$

dan frekuensi osilasi:[5]

$$\omega = \frac{|q|B}{m} \,. \tag{72}$$

[4]Jika $q > 0$, titik seimbang bergeser ke kanan. Jika $q < 0$, titik seimbang bergeser ke kiri.

[5]Frekuensi selalu positif, karena itu dipakai magnitude muatan $|q|$.

Apabila $u(x)$ adalah fungsi eigen osilator harmonik dengan titik seimbang di $x = 0$, yang tentu saja sudah diketahui (ingat kuliah Mekanika Kuantum 1):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{q^2B^2x^2}{2m}\right) u(x) = Eu(x)\,, \tag{73}$$

maka mudah diperoleh bahwa $v(x) = u(x - \frac{|q|}{q}x_0)$, sehingga:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y) = u\left(x - \frac{|q|}{q}x_0\right) e^{i|q|Bx_0y/\hbar}\,, \tag{74}$$

dan energi:

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{75}$$

Tingkat-tingkat energi di Eq. (75) disebut level Landau.

Kini, anggap partikel bermuatan tersebut terperangkap dalam sebuah pita berukuran $x \times y = L_1 \times L_2$ (catat bahwa L di sini bukan momentum angular). Pada arah y berlaku syarat batas:

$$\psi(x, y) = \psi(x, y + L_2)\,, \tag{76}$$

yang berarti:

$$e^{i|q|Bx_0L_2/\hbar} = 1 \rightarrow \frac{|q|Bx_0}{\hbar}L_2 = 2\pi n^*\ ,\ n^* = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{77}$$

Dengan demikian, pada suatu level Landau terdapat beberapa keadaan dengan nilai n^* berbeda. Jadi, ada degenerasi di sini, yaitu terdapat keadaan-keadaan berbeda namun dengan energi (level Landau) yang sama. Karena, sesuai ukuran pita arah x:

$$0 \leqslant x_0 \leqslant L_1\,, \tag{78}$$

maka batas nilai n^* bergantung pada ukuran pita:

$$n^* = \frac{|q|Bx_0}{2\pi\hbar}L_2 \rightarrow 0 \leqslant n^* \leqslant \frac{|q|B}{2\pi\hbar}L_1L_2\,. \tag{79}$$

Jika didefinisikan suatu panjang magnetik (*magnetic length*) l_B sebagai berikut:

$$l_B^2 = \frac{\hbar}{|q|B}\,, \tag{80}$$

maka nilai terbesar n^* dinyatakan sebagai:

$$n^*_{max} = \frac{|q|B}{2\pi\hbar}L_1L_2 = \frac{L_1L_2}{2\pi l_B^2}\,, \tag{81}$$

yang menyatakan jumlah maksimum keadaan pada suatu level Landau. Dengan demikian, suatu level Landau yang terisi penuh memiliki rapat luas keadaan sebagai berikut:

$$n_B = \frac{n^*_{max}}{L_1L_2} = \frac{1}{2\pi l_B^2}\,. \tag{82}$$

Jarak antar level Landau yang berurutan pada Eq. (75) adalah $\hbar\omega$, yang dapat dinyatakan dalam panjang magnetik sebagai berikut:

$$\hbar\omega = \frac{|q|B\hbar}{m} = \frac{\hbar^2}{ml_B^2}\,. \tag{83}$$

G. Efek Hall Kuantum Integral (*The Integral Quantum Hall Effect*)

Level Landau yang dijelaskan di bagian sebelum ini dipakai untuk menjelaskan secara kualitatif fenomena yang disampaikan di bagian ini. Sebagai catatan, agar tidak tertukar dengan notasi rapat arus listrik $\mathbf{j}$, kita gunakan di sini unit vektor $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ masing-masing untuk menyatakan arah vektor sejajar sumbu x, y, z. Sekarang, perhatikan sebuah eksperimen dengan sampel konduktor berupa pita seperti dalam Fig. 16-1 Gasiorowicz. Sampel tersebut berada dalam medan listrik konstan $\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{y}}$ dan medan magnetik konstan $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

Jika medan magnetik belum diaktifkan, maka akibat medan listrik timbul arus listrik dengan rapat arus:

$$\mathbf{j} = \sigma_0\mathbf{E} = \sigma_0 E_y\hat{\mathbf{y}} = j_y\hat{\mathbf{y}} \to j_y = \sigma_0 E_y\,, \tag{84}$$

dengan σ_0 adalah konduktivitas listrik, yang diberikan sebagai:

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2\tau_0}{m_e^*}\,, \tag{85}$$

dengan $-e$ muatan elektron, n_e densitas elektron, m_e^* massa efektif elektron dalam bahan, τ_0 waktu bebas rata-rata elektron (rata-rata waktu antara dua tumbukan berturutan antara elektron dan cacat pada bahan).[6] Jika medan magnetik diaktifkan, pada elektron bekerja gaya magnetik:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -eB\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{86}$$

Mengingat rapat arus listrik berhubungan dengan kecepatan elektron sebagai berikut:

$$\mathbf{j} = -en_e\mathbf{v}\,, \tag{87}$$

gaya magnetik pada elektron dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{n_e} = \frac{B}{n_e}\mathbf{j}\times\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{88}$$

Gaya $\mathbf{F}$ tersebut dapat dianggap sebagai akibat interaksi elektron dengan suatu medan listrik $\mathbf{E}'$:

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{F}}{-e} = -\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{en_e} = -\frac{B}{en_e}\mathbf{j}\times\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{89}$$

[6] Di sini, yang menjadi pembawa muatan adalah elektron. Pada eksperimen yang digambarkan Fig. 16-1 Gasiorowicz terdapat sumber elektron. Sesuai definisi arah arus listrik, arah rapat arus listrik berlawanan terhadap arah gerak elektron. Mengingat bahwa sistem yang kita amati berwujud 2 dimensi, maka rapat arus di sini bukanlah dihitung per luas, melainkan per panjang, yang dilewati arus secara tegak lurus. Demikian pula, densitas elektron dihitung per luas, bukan per volume.

Dengan demikian, rapat arus listrik menjadi:

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}'\right) = \sigma_0 \left(E_y \hat{\mathbf{y}} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{e n_e}\right) = \sigma_0 \left(E_y \hat{\mathbf{y}} - \frac{B}{e n_e} \mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}}\right) . \tag{90}$$

Komponen x dan y rapat arus listrik diperoleh sebagai berikut (catat, tidak ada konponen z):

$$\begin{aligned}
j_x =& -\sigma_0 \frac{B}{e n_e} (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}})_x = -\frac{\sigma_0 B}{e n_e} j_y \\
j_y =& \sigma_0 \left(E_y - \frac{B}{e n_e} (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}})_y\right) = \sigma_0 \left(E_y + \frac{B}{e n_e} j_x\right) = \sigma_0 E_y - \left(\frac{\sigma_0 B}{e n_e}\right)^2 j_y \\
\rightarrow j_y =& \frac{\sigma_0 E_y}{1 + \left(\frac{\sigma_0 B}{e n_e}\right)^2} = \frac{n_e e^2 \tau_0 E_y}{m_e^*} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{e \tau_0 B}{m_e^*}\right)^2}\right] \qquad (91) \\
\rightarrow j_x =& \frac{e n_e}{\sigma_0 B} \left(j_y - \sigma_0 E_y\right) = \frac{e n_e E_y}{B} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_0 B}{e n_e}\right)^2} - \frac{e n_e E_y}{B} = \frac{e n_e E_y}{B} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{e \tau_0 B}{m_e^*}\right)^2} - 1\right] . \qquad (92)
\end{aligned}$$

Kita perhatikan magnitudenya, yaitu:

$$|j_y| = \frac{n_e e^2 \tau_0 E_y}{m_e^*} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{e \tau_0 B}{m_e^*}\right)^2}\right] \tag{93}$$

$$|j_x| = \frac{e n_e E_y}{B} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{e \tau_0 B}{m_e^*}\right)^2}\right] . \tag{94}$$

Rapat luas elektron dapat dinyatakan sebanding dengan rapat luas keadaan pada level Landau yang terisi penuh, yang didefinisikan di Eq. (82), dengan konstanta kesebandingan f:

$$n_e = f n_B = f \frac{eB}{2\pi\hbar} \rightarrow f = \frac{2\pi\hbar}{e} \frac{n_e}{B} , \tag{95}$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{|j_y|}{E_y} = f \frac{e^3 B \tau_0}{2\pi\hbar m_e^*} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{e \tau_0 B}{m_e^*}\right)^2}\right] \tag{96}$$

$$\frac{|j_x|}{E_y} = f \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{e \tau_0 B}{m_e^*}\right)^2}\right] . \tag{97}$$

Dalam eksperimen, densitas elektron n_e dan besar medan magnetik B dapat diatur. Didapatkan oleh Klitzing, Dorda, dan Pepper di 1980 bahwa pada nilai-nilai B dan n_e sedemikian, sehingga f bernilai bulat ($f = 1, 2, 3, ...$):

$$\begin{aligned}
\frac{|j_y|}{E_y} &= 0 \\
\frac{|j_x|}{E_y} &= f \frac{e^2}{2\pi\hbar} \ , \ (f = 1, 2, 3, ...) .
\end{aligned} \tag{98}$$

Penjelasan yang sangat disederhanakan mengenai hal ini adalah bahwa apabila semua keadaan pada level Landau terisi penuh, maka elektron-elektron tidak dapat menjalani hamburan / tumbukan elastis di dalam bahan, karena tidak tersedia keadaan akhir reaksi yang masih kosong pada energi yang sama. Elektron juga tidak dapat mengisi keadaan yang kosong pada level Landau yang lain, karena tidak cukup energi untuk eksitasi. Dengan demikian, waktu bebas rata-rata elektron menjadi sangat panjang, $\tau_0 \to \infty$, sehingga $|j_y|/E_y$ di Eq. (96) menjadi sangat kecil, nol, dan begitu pula suku kedua $|j_x|/E_y$ di Eq. (97). Penjelasan yang lengkap pun, dengan memperhitungkan efek-efek lain, tetap memberikan hasil seperti di Eq. (98).

H. Tambahan catatan tentang invariansi tera

Di tempat dengan medan listrik dan medan magnetik nol tidak berarti bahwa potensial skalar dan potensial vektor juga nol, meskipun dengan transformasi tera mungkin dapat juga dibuat nol. Kita perhatikan contoh berikut ini.

Ambillah suatu daerah dengan medan magnetik konstan di dalamnya, dan dipilih sumbu z sejajar medan magnetik itu:

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}} . \tag{99}$$

Bayangkan daerah dengan medan magnetik di dalamnya itu menyerupai silinder, dengan sumbu sejajar sumbu z dan radiusnya a. Dengan menerapkan teorema Stokes, diperoleh untuk radius $\rho \leqslant a$:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} &= \int d\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \\ &= \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \\ \to \pi\rho^2 B &= 2\pi\rho A_\phi \\ \to A_\phi &= \frac{1}{2}\rho B , \end{aligned} \tag{100}$$

dengan A_ϕ adalah komponen ϕ potensial vektor $\mathbf{A}$. Untuk radius $\rho > a$:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} &= \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \\ \to \pi a^2 B &= 2\pi\rho A_\phi \\ \to A_\phi &= \frac{\pi a^2 B}{2\pi\rho} = \frac{\Phi}{2\pi\rho} , \end{aligned} \tag{101}$$

dengan Φ adalah fluks magnetik uniform dalam daerah menyerupai silinder tersebut ($\rho \leqslant a$). Dengan demikian, kita lihat bahwa di daerah dengan $\rho > a$, yang berarti di luar daerah dengan medan magnetik, potensial vektor tidak nol.

Komponen ϕ potensial vektor $\mathbf{A}$ di Eq. (101) dapat ditulis sebagai suatu gradien:

$$A_\phi = (\boldsymbol{\nabla})_\phi \, g(\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\phi} g(\phi) , \tag{102}$$

sehngga diperoleh:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\phi}g(\phi) = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \to g(\phi) = \left(\frac{\Phi}{2\pi}\right)\phi\,. \tag{103}$$

Orang dapat lakukan transformasi tera pada $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla} g(\phi) = \mathbf{A} - \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\phi}g(\phi)\,, \tag{104}$$

sehingga diperoleh $A'_\phi = 0$. Dalam mekanika kuantum, transformasi yang sama harus juga diterapkan pada fungsi gelombang, yaitu:

$$\psi'(\mathbf{r},t) = e^{-iqg(\phi)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) = e^{-i\left(\frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\right)\phi}\psi(\mathbf{r},t)\,. \tag{105}$$

Faktor fase $e^{-i\left(\frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\right)\phi}$ tidak mengubah kuadrat fungsi gelombang, $|\psi'(\mathbf{r},t)|^2 = |\psi(\mathbf{r},t)|^2$, namun pada beberapa situasi tertentu efek faktor fase itu dapat diamati atau diukur. Dengan kata lain, pada situasi tertentu transformasi tera menimbulkan efek yang dapat diamati. Hal ini ditunjukkan oleh Y. Aharonov dan D. Bohm di 1959, dan dikenal sebagai efek Aharonov-Bohm.