Catatan Mekanika Kuantum 2

Interaksi Partikel Bermuatan dengan Medan Elektromagnetik

Acuan Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 16, Subbab 1 & 2

Salah satu interaksi yang berperan dalam proses-proses mikroskopik, yang melibatkan benda-benda kecil, partikel-partikel subatomik, partikel-partiel elementer adalah interaksi elektromagnetik. (Catat bahwa interaksi elektromagnetik tidak hanya berperan dalam proses mikroskopik, melainkan juga dalam proses makroskopik.) Proses-proses mikroskopik merupakan proses kuantum. Dengan demikian, perlu kita pelajari proses elektromagnetik, yaitu yang dipicu oleh interaksi partikel bermuatan dengan medan elektromagnetik, menurut mekanika kuantum. Pembahasan mengenai hal ini ditempatkan di awal kuliah Mekanika Kuantum 2, mengingat sebagian topik dalam kuliah ini, seperti atom hidrogen riil, teori gangguan (perturbasi), berkaitan dengan interaksi partikel bermuatan dan medan elektromagnetik.

Sedikit catatan. Dalam buku Gasiorowicz Bab 16, partikel yang diamati adalah elektron, dengan massa m_e dan muatan $-e$. Dalam catatan ini kita ambil sembarang partikel, dengan massa m dan muatan q. Dengan demikian, ada perbedaan notasi dan tanda $+/-$ antara persamaan-persamaan dalam catatan ini dan yang di buku Gasiorowicz.

A. Potensial elektromagnetik

Kita kembali ke elektrodinamika klasik. Kita kenal persamaan Maxwell sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}, t) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0\,, \tag{4}$$

dengan $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ medan magnetik, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ medan listrik, $\rho(\mathbf{r}, t)$ rapat muatan, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ rapat arus, c laju cahaya di vakum, ϵ_0 permittivitas vakum, dan μ_0 permeabilitas vakum. Didefinisikan potensial elektromagnetik,[1] yaitu potensial vektor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ dan potensial skalar $\phi(\mathbf{r}, t)$, sebagai berikut:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \tag{5}$$

[1]Sekedar catatan, sebutan potensial dalam elektromagnetik memang untuk suatu besaran dengan dimensi potensial, bukan energi. Dalam mekanika kuantum, namun, sebutan potensial biasanya untuk energi potensial akibat suatu interaksi, yang berarti suatu besaran dengan dimensi energi.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t)\,. \tag{6}$$

Definisi $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ dan $\phi(\mathbf{r},t)$ di Eqs. (5) dan (6) tidak mengubah (tentu saja, tidak boleh mengubah) persamaan Maxwell (1) dan (4), seperti ditunjukkan sebagai berikut (ingat sifat perkalian silang $\times$ dan perkalian titik $\cdot$, serta bahwa $\mathbf{r}$ dan t sebagai variabel bebas tidak saling bergantung):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \boldsymbol{\nabla}\times\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) \\ &= 0 \end{aligned}\tag{8}$$

Dalam potensial elektromagnetik $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ dan $\phi(\mathbf{r},t)$, persamaan Maxwell (2) menjadi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t)\right) &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t) \\ \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) - \nabla^2\phi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t)\end{aligned}\tag{9}$$

dan persamaan Maxwell (3) menjadi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t)\right) &= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \\ \rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r},t) &= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\end{aligned}\tag{10}$$

Dalam koordinat Cartesian berlaku:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) - \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\,, \tag{11}$$

sehingga dalam koordinat Cartesian Eq. (10) menjadi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) - \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r},t) &= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \\ \rightarrow -\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r},t)\right) &= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\,.\end{aligned}\tag{12}$$

B. Invariansi tera (*gauge invariance*)

Apabila $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ditransformasikan ke $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)$ menurut transformasi berikut:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}g(\mathbf{r},t)\,, \tag{13}$$

dengan $g(\mathbf{r},t)$ suatu skalar, maka medan magnetik $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ di Eq. (5) tidak berubah (invarian):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'(\mathbf{r},t) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) \\ &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}g(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \\
&= \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\,. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Jika secara bersamaan $\phi(\mathbf{r},t)$ ditransformasikan ke $\phi'(\mathbf{r},t)$ menurut transformasi:

$$
\phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{r},t)\,, \qquad (15)
$$

medan listrik $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ di Eq. (6) juga tidak berubah (invarian):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}'(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi'(\mathbf{r},t) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{r},t) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r},t) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, potensial elektromagnetik $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ dan $\phi(\mathbf{r},t)$ tidak unik. Ada banyak, tak berhingga, variasi $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ dan $\phi(\mathbf{r},t)$ menurut Eqs. (13) dan (15), yang semuanya terhubung ke medan elektromagnetik $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ dan $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ yang sama. Transformasi sistem dan proses elektromagnetik menurut Eqs. (13) dan (15) disebut transformasi tera (*gauge transformation*), invariansi sistem dan proses elektromagnetik tersebut dalam transformasi tera disebut invariansi tera (*gauge invariance*). Transformasi dan invariansi tera diterapkan baik dalam mekanika (elektrodinamika) klasik maupun mekanika (elektrodinamika) kuantum.

Dengan adanya invariansi tera, orang dapat memilih potensial elektromagnetik sedemikian, sehingga menyederhanakan perhitungan. Yang umum dikenal adalah dua pilihan yang disebut tera Coulomb (*Coulomb gauge*) dan tera Lorentz (*Lorentz gauge*):

- Tera Coulomb dapat dipilih apabila rapat muatan tetap, tidak berubah terhadap waktu, $\rho(\mathbf{r})$. Pada tera Coulomb dipilih $g(\mathbf{r},t)$ sedemikian, sehingga:[2]

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0\,. \qquad (17)
$$

  Dengan demikian, Eq. (9) menjadi persamaan Poisson untuk potensial skalar, yang juga tidak bergantung pada waktu, $\phi(\mathbf{r})$:

$$
\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r})\,. \qquad (18)
$$

  Dari Eq. (12) (ingat, dalam hal ini harus digunakan koordinat Cartesian) diperoleh suatu persamaan gelombang untuk potensial vektor:

$$
\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\,. \qquad (19)
$$

[2] Pada kenyataannya, kita tidak perlu tahu fungsi $g(\mathbf{r},t)$ seperti apa.

- Jika rapat muatan tidak tetap, dapat digunakan tera Lorentz. Pada tera Lorentz dipilih transformasi tera sedemikian, sehingga

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, t) = 0\,. \tag{20}$$

  Dari persamaan (9) diperoleh persamaan gelombang untuk $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}, t)\,. \tag{21}$$

  Persamaan gelombang (19) untuk $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tetap berlaku pada tera Lorentz.

C. Substitusi minimal (*minimal substitution*)

Pada sebuah partikel bermassa m, bermuatan q, dan bergerak dengan kecepatan $\mathbf{v}$ dalam medan listrik $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ dan medan magnetik $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ bekerja gaya Lorentz sebagai berikut:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\right]\,. \tag{22}$$

Gaya Lorentz tersebut dapat diperoleh menggunakan mekanika Newtonian. Namun, di sini dipakai dinamika Hamiltonian (atau formulasi Hamiltonian) untuk mendapatkan gaya Lorentz. Ini dilakukan untuk memperoleh hamiltonian H, yang dapat membawa pada gaya Lorentz tersebut, atau secara lebih umum mendapatkan hamiltonian untuk sebuah partikel bermuatan yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik. Mengapa perlu mengetahui hamiltonian tersebut? Karena dalam mekanika kuantum orang bekerja dengan hamiltonian H. Pada bagian ini, namun, kita masih bekerja dalam mekanika klasik.

Yang ditunjukkan pada bagian ini bukanlah mendapatkan atau menurunkan hamiltonian yang dicari, melainkan sebaliknya, yaitu berangkat dari suatu hamitonian ditunjukkan bahwa gaya Lorentz dapat diperoleh. Demi kemudahan, kita pilih salah satu komponen saja, sebut saja komponen k. Komponen k gaya Lorentz dinyatakan sebagai berikut:

$$m\frac{d^2 r_k}{dt^2} = q\left\{E_k(\mathbf{r}, t) + \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\right]_k\right\}\,. \tag{23}$$

Kita mulai dengan hamiltonian H yang dinyatakan dalam potensial elektromagnetik sebagai berikut:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\left(p_j - qA_j(\mathbf{r}, t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r}, t)\,. \tag{24}$$

Suku ke-2 kita kenali sebagai energi potensial listrik. Suku pertama juga kita kenali sebagai energi kinetik, namun dengan momentum linier yang berbeda. Kita masukkan H dari Eq. (24) ke persamaan gerak Hamilton atau persamaan gerak kanonis (ingat kembali kuliah Mekanika

Klasik mengenai dinamika Hamiltonian), diperoleh:[3]

$$\frac{dr_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m}\left(p_k - qA_k(\mathbf{r},t)\right) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r_k} = \frac{q}{m}\sum_{j=1}^{3}\left(p_j - qA_j(\mathbf{r},t)\right)\frac{\partial}{\partial r_k}A_j(\mathbf{r},t) - q\frac{\partial}{\partial r_k}\phi(\mathbf{r},t) \\ &= q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial}{\partial r_k}A_j(\mathbf{r},t) - q\frac{\partial}{\partial r_k}\phi(\mathbf{r},t)\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Kita dapatkan bahwa gaya yang bekerja pada partikel itu adalah gaya Lorentz:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2r_k}{dt^2} &= m\frac{d}{dt}\frac{dr_k}{dt} \\ &= m\frac{d}{dt}\frac{1}{m}\left(p_k - qA_k(\mathbf{r},t)\right) \\ &= \frac{dp_k}{dt} - q\frac{d}{dt}A_k(\mathbf{r},t) \\ &= q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial}{\partial r_k}A_j(\mathbf{r},t) - q\frac{\partial}{\partial r_k}\phi(\mathbf{r},t) - q\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}A_k(\mathbf{r},t)\frac{dr_i}{dt} - q\frac{\partial}{\partial t}A_k(\mathbf{r},t) \\ &= q\left(-\frac{\partial}{\partial t}A_k(\mathbf{r},t) - \frac{\partial}{\partial r_k}\phi(\mathbf{r},t)\right) + q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial r_k}A_j(\mathbf{r},t) - \frac{\partial}{\partial r_j}A_k(\mathbf{r},t)\right) \\ &= qE_k(\mathbf{r},t) + q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)_i\epsilon_{kji}\ ,\ \left(\epsilon_{kji} = \text{ simbol Levi-Civita}\right) \\ &= qE_k(\mathbf{r},t) + q\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right]_k \\ &= q\left\{E_k(\mathbf{r},t) + \left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right]_k\right\} \end{aligned} \tag{27}$$

Orang simpulkan bahwa untuk kasus sebuah partikel bermuatan q berinteraksi dengan medan elektromagnetik, modifikasi minimal pada hamiltonian dapat dilakukan dengan cukup mengganti $\mathbf{p}$ dengan $\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$:

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r},t) \rightarrow H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + V(\mathbf{r},t)\,. \tag{28}$$

Ini dikenal dengan istilah substitusi minimal (*minimal substitution*), dan berlaku baik di mekanika klasik maupun mekanika kuantum.

[3] Persamaan (25) menunjukkan relasi antara komponen k momentum p_k dan kecepatan $\frac{dr_k}{dt}$, yang tidak kita kenal sebagaimana biasanya. Di sini $\mathbf{p}$ memang bukanlah besaran fisika momentum linier yang biasa kita kenal, melainkan merupakan variabel momentum kanonik, sebagai pasangan dari $\mathbf{r}$. Besaran fisika momentum linier dalam hal ini adalah $\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, yang relasinya dengan kecepatan $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ sebagaimana yang biasa kita kenal, yang ditunjukkan dalam Eq. (25).

D. Persamaan Schrödinger sebuah partikel bermuatan, yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik

Di sini kita mulai bekerja dalam mekanika kuantum, dengan operator dan keadaan (*state*) atau fungsi gelombang (*wave function*) dalam suatu representasi tertentu. Kita terapkan substitusi minimal pada persamaan Schrödinger. Dalam representasi posisi (ruang posisi) operator momentum dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\,, \tag{29}$$

dengan demikian, persamaan Schrödinger (bergantung waktu) untuk sebuah partikel bermassa m dan bermuatan q, yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik, dinyatakan sebagai berikut:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t)\,. \tag{30}$$

Kita lakukan transformasi tera pada persaman Schrödinger di Eq. (30), yaitu kita ubah menurut yang berikut ini:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \to \mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}g(\mathbf{r},t) \tag{31}$$

$$\phi(\mathbf{r},t) \to \phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{r},t) \tag{32}$$

$$\psi(\mathbf{r},t) \to \psi'(\mathbf{r},t)\,. \tag{33}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{r},t) &= \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi'(\mathbf{r},t)\right]\psi'(\mathbf{r},t) \\
\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{r},t) &= \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla}g(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r},t) + q\frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{r},t)\right]\psi'(\mathbf{r},t)\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

Persamaan Schrödinger harus memenuhi invariansi tera, jadi, Eq. (34) harus sama dengan Eq. (30). Untuk itu, kita cari transformasi tera untuk fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r},t)$. Secara teknis, kita usahakan agar suku-suku Eq. (34) yang mengandung $g(\mathbf{r},t)$ menjadi hilang. Dicoba:

$$\psi'(\mathbf{r},t) = e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}\psi(\mathbf{r},t)\,. \tag{35}$$

Kita dapatkan untuk ruas kiri Eq. (34):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}\psi(\mathbf{r},t) = e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) - e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}\hbar\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r},t) \tag{36}$$

dan untuk ruas kanan Eq. (34):

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla}g(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r},t) + q\frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{r},t)\right]e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}\psi(\mathbf{r},t) \\
&\quad = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla}g(\mathbf{r},t)\right)^2 e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}\psi(\mathbf{r},t)
\end{aligned}$$

$$+ e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)} q\phi(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) + e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)} q\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{r},t) \,. \tag{37}$$

Suku terakhir Eqs. (36) dan (37) menyarankan bahwa:

$$\Lambda(\mathbf{r},t) = -\frac{q}{\hbar} g(\mathbf{r},t) \,, \tag{38}$$

sehingga dapat saling meniadakan. Dengan menerapkan Eq. (38), kita kerjakan faktor energi kinetik Eq. (34):

$$\begin{aligned}
&(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t))^2 \, e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) \\
&\quad = (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)) \cdot (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)) \, e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) \\
&\quad = (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)) \\
&\qquad \cdot \left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) + q e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)\right) \\
&\quad = (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)) \\
&\qquad \cdot \left(-i\hbar e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r},t) - q e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t) \right. \\
&\qquad \left. - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) + q e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)\right) \\
&\quad = (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)) \, e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \cdot (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) \, \psi(\mathbf{r},t) \,.
\end{aligned} \tag{39}$$

Anggap:

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) = (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) \, \psi(\mathbf{r},t) \,, \tag{40}$$

maka Eq. (39) dilanjutkan menjadi:

$$\begin{aligned}
&(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)) \, e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) \\
&\quad = \left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) + q e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) \cdot \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)\right) \\
&\quad = \left(-i\hbar e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) - q e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) \cdot \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t) \right. \\
&\qquad \left. - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) + q e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) \cdot \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r},t)\right) \\
&\quad = e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \, (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) \\
&\quad = e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \, (-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2 \, \psi(\mathbf{r},t) \,.
\end{aligned} \tag{41}$$

Dengan demikian, Eqs. (36) – (38) dan (41) membuat Eq. (34) menjadi sama dengan Eq. (30):

$$\begin{aligned}
e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) &= e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar} \left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2 + q\phi(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t) \\
\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) &= \left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2 + q\phi(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t) \,.
\end{aligned} \tag{42}$$

Jadi, diperoleh transformasi tera untuk fungsi gelombang sebagai berikut:

$$\psi'(\mathbf{r},t) = e^{-iqg(\mathbf{r},t)/\hbar}\psi(\mathbf{r},t) \,. \tag{43}$$

Kini, sebagai contoh, kita ambil kasus potensial skalar yang tak bergantung pada waktu, $\phi(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r})$, dan terapkan tera Coulomb, yaitu:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0 \,. \tag{44}$$

Persamaan Schrödinger (30) menjadi:[4]

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) &= \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},t) \\
&= \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)\cdot\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right) + q\phi(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\nabla} + iq\hbar\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t) + q\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\nabla} + iq\hbar\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right) + iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\nabla}\right. \\
&\quad \left. + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t) + q\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t) + q\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t)\,. \qquad (46)
\end{aligned}
$$

Jika dalam hal ini medan magnetik, yang berarti vektor potensial, juga tidak bergantung pada waktu, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, persamaan Schrödinger menjadi:

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},t) + q\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t)\,. \qquad (47)
$$

Dalam medan elektromagnetik yang tak bergantung pada waktu tersebut, sistem berada dalam keadaan tunak (stasioner) dengan energi E, dan solusi persamaan Scrödinger (47) adalah:

$$
\psi(\mathbf{r},t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\mathbf{r})\,, \qquad (48)
$$

dengan fungsi gelombang tunak $\psi(\mathbf{r})$ memenuhi persamaan Schrödinger tak bergantung waktu berikut:

$$
\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \qquad (49)
$$

[4]Ingat bahwa operator bekerja ke semua yang di kanan. Di sini:

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) = \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t) + \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r},t)\,. \qquad (45)
$$