Catatan Mekanika Kuantum 1

Contoh Sistem Banyak Partikel

Acuan utama Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 13, Subbab 4 – 6

A. Prinsip eksklusi dan problem dua partikel

Kita tengok kembali kasus 2 partikel. Jika interaksi bergantung pada posisi relatif antar kedua partikel, pusat massa didapatkan bergerak sebagai partikel bebas dan persamaan Schrödinger yang masih harus dipecahkan adalah:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\mathbf{r})\right] u(\mathbf{r}) = E u(\mathbf{r})\,. \tag{1}$$

Kita ambil kasus khusus, yaitu kedua partikel identik, sehingga hamiltonian sistem tidak berubah apabila kedua partikel dipertukarkan. Namun, kita lihat bahwa apabila kedua partikel dipertukarkan, $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, sehingga:

$$V(\mathbf{r}) \to V(-\mathbf{r}) \neq V(\mathbf{r})\,. \tag{2}$$

Dengan demikian, supaya hamiltonian tetap, interaksi harus sentral, yaitu $V(\mathbf{r}) = V(r)$ dan persamaan Schrödinger menjadi:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r)\right] u(\mathbf{r}) = E u(\mathbf{r})\,, \tag{3}$$

dengan solusi yang telah kita ketahui dapat dipisah menjadi fungsi radial $R_{El}(r)$ dan fungsi harmonik bola $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$u_{Elm}(\mathbf{r}) = R_{El}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)\,. \tag{4}$$

Jika kedua partikel dipertukarkan, $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, yang berarti:

$$r \to r\ , \quad \theta \to \pi - \theta\ , \quad \phi \to \phi + \pi\,. \tag{5}$$

Jadi, fungsi radial tidak berubah, namun fungsi harmonik bola berubah menjadi:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) \to Y_{lm}(\pi-\theta, \phi+\pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi) = \begin{cases} Y_{lm}(\theta,\phi) & ,\quad (l = 0\ \&\ \text{genap}) \\ -Y_{lm}(\theta,\phi) & ,\quad (l =\ \text{ganjil}) \end{cases}\,. \tag{6}$$

Dengan demikian, terhadap pertukaran kedua partikel identik tersebut, $u_{Elm}(\mathbf{r})$ bersifat simetrik untuk l bernilai 0 maupun genap, $u_{Elm}(\mathbf{r})$ bersifat antisimetrik untuk l bernilai ganjil.

Kini kita sertakan spin. Kita temui dua kasus, sistem 2 fermion dan sistem 2 boson. Keadaan spin total 2 fermion maupun keadaan spin total 2 boson kedua-duanya dapat bersifat simetrik, misalkan $|\lambda\rangle^{(S)}$, maupun antisimetrik, misalkan $|\lambda\rangle^{(A)}$[1]. Keadaan sistem 2 fermion, sesuai prinsip eksklusi, bersifat antisimetrik. Jadi, ada dua kemungkinan untuk keadaan sistem 2 fermion, yaitu:

$$u_{Elm}(\mathbf{r})|\lambda\rangle^{(S)}\,,\ (l = \text{ ganjil}) \qquad \text{atau} \qquad u_{Elm}(\mathbf{r})|\lambda\rangle^{(A)}\,,\ (l = 0\ \&\, \text{genap})\,. \tag{7}$$

Keadaan sistem 2 boson bersifat simetrik. Jadi, ada dua kemungkinan untuk keadaan sistem 2 boson, yaitu:

$$u_{Elm}(\mathbf{r})|\lambda\rangle^{(A)}\,,\ (l = \text{ ganjil}) \qquad \text{atau} \qquad u_{Elm}(\mathbf{r})|\lambda\rangle^{(S)}\,,\ (l = 0\ \&\, \text{genap})\,. \tag{8}$$

Perhatikan kembali persamaan (5), yang menunjukkan perubahan komponen variabel posisi $\mathbf{r}$ akibat pertukaran dua partikel. Perubahan yang sama juga terjadi apabila dilakukan pencerminan terhadap pusat koordinat, yaitu operasi paritas. Operasi paritas pada keadaan atau fungsi gelombang tidak mengubah fungsi radial, namun mengubah fungsi harmonik bola sama seperti pada persamaan (6). Dengan demikian, momentum angular orbital l juga menunjukkan paritas sistem. Untuk l bernilai 0 maupun genap, sistem memiliki paritas genap atau positif. Untuk l bernilai ganjil, sistem memiliki paritas ganjil atau negatif.

Operasi paritas, namun, tidak sama dengan pertukaran partikel. Pertukaran partikel terjadi di seluruh ruang, yaitu di ruang posisi (atau di ruang momentum, sebagai konjugat ruang posisi), di ruang spin, dan di ruang lain yang diperhitungkan untuk sistem yang diamati. Operasi paritas hanya terjadi di ruang posisi (atau ruang momentum). Apabila untuk sistem yang diamati hanya diperhitungkan ruang posisi (atau ruang momentum), operasi paritas sama dengan pertukaran partkel.

B. Prinsip eksklusi dan sistem partikel tak saling berinteraksi

Ambillah hamiltonian 3 dimensi sebagai berikut:

$$H = H_x + H_y + H_z = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V(y) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z)\,. \tag{9}$$

Catatan bahwa H_x, H_y, H_z bukan komponen vektor, karena hamiltonian H bukan vektor. Teknik separasi variabel memberikan tiga persamaan nilai eigen energi terpisah:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] u_{E_1}(x) = E_1 u_{E_1}(x) \tag{10}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + V(y)\right] u_{E_2}(y) = E_2 u_{E_2}(y) \tag{11}$$

[1] Lebih detil tentang spin dibahas di kuliah lanjutan, yaitu Mekanika Kuantum 2.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}+V(z)\right]u_{E_3}(z)=E_3u_{E_3}(z)\,, \tag{12}$$

dan fungsi eigen serta energi eigen hamiltonian total H diperoleh sebagai:

$$u_{E_1E_2E_3}(x,y,z)=u_{E_1}(x)u_{E_2}(y)u_{E_3}(z) \qquad \text{dan} \qquad E=E_1+E_2+E_3\,. \tag{13}$$

Jika diterapkan pada kasus partikel dalam kotak potensial 3 dimensi berupa kubus dengan panjang sisi L, diperoleh fungsi eigen serta energi eigen hamiltonian total H sebagai berikut:

$$u_{n_1n_2n_3}(x,y,z)=\left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}}\sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin\frac{n_2\pi y}{L}\sin\frac{n_3\pi z}{L}\ \text{ dan }\ E_{n_1n_2n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\,. \tag{14}$$

Beberapa kombinasi nilai (n_1,n_2,n_3) dapat memberikan nilai $n_1^2+n_2^2+n_3^2$ yang sama dan, dengan demikian, nilai energi yang sama. Jadi, di sini terdapat kasus degenerasi.

Jika terdapat N boson identik tak saling berinteraksi (anggaplah gas ideal boson identik) yang terperangkap dalam kotak potensial 3 dimensi tersebut di atas, pada keadaan dasar (*ground state*) semua N boson tersebut menempati keadaan $(n_1,n_2,n_3)=(1,1,1)$, karena untuk boson identik tidak berlaku prinsip eksklusi, sehingga lebih dari satu boson identik dapat menempati keadaan yang sama. Energi total sistem pada keadaan dasar adalah:

$$E=NE_{111}=N\frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \tag{15}$$

dan energi rata-rata sistem:

$$\frac{E}{N}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\,. \tag{16}$$

Kini, bayangkan N fermion identik berspin $\frac{1}{2}$ tak saling berinteraksi (gas ideal fermion identik) terperangkap dalam kotak potensial 3 dimensi tersebut di atas. Pada keadaan dasar fermion-fermion identik itu tidak semua menempati keadaan $(1,1,1)$, melainkan mengisi keadaan-keadaan berbeda, mengikuti prinsip eksklusi. Karena berspin $\frac{1}{2}$, tiap keadaan hanya dapat ditempati oleh 2 fermion identik, yang satu dengan spin $+\frac{1}{2}$ (*up*) dan yang lain dengan spin $-\frac{1}{2}$ (*down*). Berikut ini kita hitung energi total sistem, energi rata-rata sistem, serta energi tertinggi yang ditempati fermion itu pada keadaan dasar, yang dikenal dengan energi Fermi.

Bayangkan ruang dengan sumbu-sumbu koordinat n_1, n_2, n_3. Tiap titik pada ruang itu merepresentasikan satu keadaan dengan energi:

$$E_n=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2\,,\ \ (n^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2)\,. \tag{17}$$

Nilai-nilai n_1, n_2, n_3 selalu positif, sehingga kita hanya mengambil $\frac{1}{8}$ bagian dari ruang yang dinyatakan oleh sumbu koordinat n_1, n_2, n_3. Fermion mengisi keadaan mulai dari keadaan dengan energi terendah sampai keadaan dengan energi Fermi E_F, dengan $n=n_F$:

$$E_F=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n_F^2\to n_F=\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}L\,. \tag{18}$$

Semua keadaan dari nilai n terkecil sampai $n = n_F$ direpresentasikan oleh semua titik dalam $\frac{1}{8}$ bola dengan radius n_F, yang jumlahnya sama dengan $\frac{1}{8}$ volume bola dengan radius n_F:

$$\frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi n_F^3 = \frac{1}{6\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} L^3 \,. \tag{19}$$

Karena tiap keadaan dapat ditempati oleh 2 fermion berspin $\frac{1}{2}$, jumlah total fermion yang menempati keadaan dari energi terendah sampai energi Fermi E_F adalah:

$$N = 2 \times \frac{1}{6\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} L^3 = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} L^3 \,. \tag{20}$$

Jadi, energi Fermi diperoleh sebagai berikut:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \frac{N}{L^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\rho\right)^{\frac{2}{3}} \,, \tag{21}$$

dengan ρ adalah rapat jumlah fermion atau densitasnya:

$$\rho = \frac{N}{L^3} \,. \tag{22}$$

Energi total diperoleh dengan menjumlahkan energi untuk semua fermion yang mengisi keadaan dari level terendah sampai level Fermi, yang sama dengan menjumlahkan energi untuk $\frac{1}{8}$ volume bola dengan radius n_F dikalikan dua (ingat, tiap keadaan ditempati 2 fermion):

$$\begin{aligned} E = 2\sum_{n}^{n_F} E_n \rightarrow E &= 2 \times \frac{1}{8}\int d^3n\, E_n \\ &= \frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\int d^3n\, n^2 \\ &= \frac{\hbar^2\pi^3}{2mL^2}\int_0^{n_F} dn\, n^4 \\ &= \frac{\hbar^2\pi^3}{10mL^2} n_F^5 \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Ingat bahwa jumlah fermion sama dengan 2 kali jumlah keadaan, sama dengan 2 kali $\frac{1}{8}$ volume bola dengan radius n_F:

$$N = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi n_F^3 = \frac{\pi}{3} n_F^3 \rightarrow n_F = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \,. \tag{24}$$

Sehingga, energi total menjadi:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^3}{10mL^2}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{\hbar^2\pi^3}{10m}\left(\frac{3\rho}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}} L^3 \,. \tag{25}$$

Jika V adalah volume ruang yang ditempati N fermion tersebut, maka $V = L^3$ dan energi total menjadi:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^3}{10m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}} \,. \tag{26}$$

Ruang yang telah kita pakai dalam mendapatkan energi total berbentuk kubus dengan panjang sisi L. Namun, apabila N sangat besar, energi total yang diperoleh di persamaan (26) bersifat umum, tidak bergantung pada bentuk ruang (bentuk sistem).

Dalam kotak potensial energi partikel adalah energi kinetik:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\,,\ (k = \text{ bilangan gelombang})\,. \tag{27}$$

Pada level Fermi, nilai bilangan gelombang k_F adalah:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\rho\right)^{\frac{2}{3}} \to k_F = \left(3\pi^2\rho\right)^{\frac{1}{3}} \tag{28}$$

dan panjang gelombang de Broglie fermion λ_F adalah:

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} = \frac{2\pi}{(3\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}} \simeq \frac{2,03}{\rho^{\frac{1}{3}}}\,. \tag{29}$$

Mengingat:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{L^3}{N} = \text{ volume ruang yang ditempati tiap fermion}\,, \tag{30}$$

maka $\rho^{-\frac{1}{3}}$ kurang lebih merupakan jarak pisah antar fermion d, yang nilainya sama dengan:

$$d \simeq \frac{\lambda_F}{2,03} \simeq \frac{\lambda_F}{2}\,. \tag{31}$$

Dengan demikian, prinsip eksklusi membuat fermion-fermion pada level Fermi terpisah satu dari yang lain minimal separuh panjang gelombang de Brogile-nya.

C. Tekanan degenerasi

Kita ambil lagi sistem N fermion identik berspin $\frac{1}{2}$ yang tak saling berinteraksi, yang telah diulas di atas. Jika gas fermion identik tersebut dikompresi (ditekan), jarak antar fermion makin kecil, densitas ρ membesar, panjang gelombang de Broglie fermion main pendek, bilangan gelombang fermion makin besar, energi kinetik fermion makin besar, temperatur makin tinggi, timbul tekanan yang makin besar, yang mendorong gas fermion itu mengembang, dengan kata lain melawan kompresi. Tekanan yang melawan kompresi tersebut dikenal dengan tekanan degenerasi, yang dihitung sebagai:

$$\begin{aligned} p_{deg} &= -\frac{\partial E}{\partial V} \\ &= -\frac{\hbar^2\pi^3}{10m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{d}{dV}V^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\hbar^2\pi^3}{15m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{\hbar^2\pi^3}{15m}\left(\frac{3\rho}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}}\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Perhatikan bahwa E adalah energi total dari persamaan (26).

Bulk modulus B, kebalikan dari kompresibilitas κ, suatu bahan didefinisikan sebagai:

$$B = -V\frac{\partial p}{\partial V}\,. \tag{33}$$

Untuk gas fermion yang sedang kita bahas, diperoleh Bulk modulus:

$$\begin{aligned} B =& -V\frac{\partial p_{deg}}{\partial V} \\ =& -V\frac{\hbar^2\pi^3}{15m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{d}{dV}V^{-\frac{5}{3}} \\ =& \frac{5}{3}\frac{\hbar^2\pi^3}{15m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}}V^{-\frac{5}{3}} \\ =& \frac{5}{3}p_{deg} \\ =& \frac{\hbar^2\pi^3}{9m}\left(\frac{3\rho}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Pada fenomena astrofisika, tekanan degenerasi memungkinkan bintang yang telah kehabisan bahan bakar berakhir menjadi obyek yang stabil. Untuk melihat hal tesebut, supaya mudah, kita ambil sebuah obyek sisa bintang mati berbentuk bola dengan rapat massa ρ homogen tak bergantung pada radius. Energi potensial gravitasi material obyek tersebut pada lapisan / kulit antara radius r dan $r + dr$ adalah:

$$dV_g = -G\frac{1}{r}M_{bola}(r)m_{lapisan}(dr) = -G\frac{1}{r}\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)\left(4\pi\rho r^2 dr\right) = -\frac{(4\pi)^2}{3}G\rho^2 r^4 dr\,. \tag{35}$$

Energi potensial gravitasi terkandung dalam bola dengan radius R:

$$V_g = \int dV_g = -\frac{(4\pi)^2}{3}G\rho^2\int_0^R dr\,r^4 = -\frac{(4\pi)^2}{15}G\rho^2 R^5\,. \tag{36}$$

Rapat massa obyek tersebut dapat dihitung sebagai jumlah massa nucleon (proton dan netron) yang terkandung di dalamnya, anggap terdapat N nukleon dan massa nukleon m_n, dibagi volume:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm_n}{V} = \frac{3Nm_n}{4\pi R^3}\,, \tag{37}$$

sehingga energi potensial gravitasi menjadi:

$$V_g = -\frac{(4\pi)^2}{15}G\left(\frac{3Nm_n}{4\pi R^3}\right)^2 R^5 = -\frac{1}{5}G(Nm_n)^2\frac{3}{R} = -\frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}G(Nm_n)^2V^{-\frac{1}{3}}\,. \tag{38}$$

Kita dapatkan tekanan gravitasi sebagai berikut:

$$p_g = -\frac{\partial V_g}{\partial V} = -\frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}G(Nm_n)^2V^{-\frac{4}{3}}\,. \tag{39}$$

Anggap dalam obyek tersebut terdapat elektron sebanyak proton dan anggap jumlah proton sama dengan jumlah netron, sehngga jumlah elektron $N_e = N/2$. Tekanan degenerasi elektron dalam obyek tersebut adalah (lihat persamaan (32)):

$$p_{deg} = \frac{\hbar^2\pi^3}{15m_e}\left(\frac{3N_e}{\pi V}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{\hbar^2\pi^3}{15m_e}\left(\frac{3N}{2\pi V}\right)^{\frac{5}{3}} . \tag{40}$$

Apabila tekanan degenerasi elektron dapat mengimbangi tekanan gravitasi, maka:

$$p_g + p_{deg} = 0 \rightarrow p_g = -p_{deg} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} G(Nm_n)^2 V^{-\frac{4}{3}} &= \frac{\hbar^2\pi^3}{15m_e}\left(\frac{3N}{2\pi V}\right)^{\frac{5}{3}} \\
\rightarrow V^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{27}{128}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2\pi}{Gm_e m_n^2} N^{-\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{3}} R^* \\
\rightarrow R^* &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{27}{128}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2\pi}{Gm_e m_n^2} N^{-\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{81\pi^2}{512}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{Gm_e m_n^2} N^{-\frac{1}{3}} ,
\end{aligned} \tag{42}$$

dengan R^* adalah radius obyek stabil sisa bintang tersebut. Contoh obyek sisa bintang yang bertahan dari keruntuhan gravitasi dengan tekanan degenerasi elektron adalah bintang kerdil pucat (*white dwarf*). Jika massa awal bintang lebih besar dari massa matahari, tekanan degenerasi elektron tidak mampu mengimbangi tekanan gravitasi, sehingga obyek terus mengalami keruntuhan gravitasi. Namun, pada keadaan tertentu, tekanan degenerasi netron dalam obyek itu mampu mengimbangi tekanan gravitasi, sehingga obyek stabil. Contoh obyek seperti ini adalah bintang netron (*neutron star*).