Catatan Mekanika Kuantum 1

Momentum Angular

Acuan utama Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 7

A. Konservasi momentum angular dan invariansi rotasional

Membahas momentum angular berarti membahas gerak rotasi, membahas gerak rotasi berarti membahas gerak yang tidak lagi dalam satu dimensi. Jadi, di sini kita melangkah sedikit ke sistem yang lebih riil, yaitu sistem 3 dimensi (3D). Besaran posisi dan operatornya berturut-turut dinyatakan sebagai $\mathbf{r}$ dan $\hat{\mathbf{r}}$. Persamaan Schrödinger sistem bermassa μ untuk keadaan tunak $|\psi\rangle$ dituliskan sebagai:[1]

$$H|\psi\rangle = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + \hat{V}(\hat{\mathbf{r}})\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle\,. \tag{1}$$

Dalam representasi posisi $\mathbf{r}$:

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{2}$$

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) \tag{3}$$

dan persamaan Schrödinger menjadi:

$$H\psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{4}$$

Kita ambil kasus khusus, yaitu kasus dengan gaya sentral (*central force*). Pada kasus ini potensial atau interaksi tidak bergantung pada vektor posisi, melainkan pada jarak:

$$V(\mathbf{r}) = V(r)\,. \tag{5}$$

Dengan demikian, sistem itu memiliki simetri bola, bersifat invarian terhadap rotasi (*rotational invariant*). Sistem yang bersifat invarian terhadap rotasi memiliki momentum angular $\mathbf{L}$ tetap; untuk sistem tersebut momentum angular $\mathbf{L}$ menjadi (salah satu) konstanta gerak. Operator momentum angular, yaitu $\hat{\mathbf{L}}$, tidak bergantung secara eksplisit pada waktu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{L}} = 0\,. \tag{6}$$

[1] Sebetulnya, ini sistem yang terdiri dari 2 benda / partikel dan μ adalah massa tereduksi (*reduced mass*) sistem itu. Lihat, sebagai contoh, kuliah Mekanika Klasik tentang gaya sentral (*central force*).

Dengan demikian, operator momentum angular dan hamiltonian komut:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L} \rangle_t = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[H, \hat{\mathbf{L}}\right] \right\rangle = 0 \rightarrow \left[H, \hat{\mathbf{L}}\right] = 0\,. \tag{7}$$

B. Operator, keadaan eigen, nilai eigen momentum angular

Serupa dengan besaran momentum angular di mekanika klasik, operator momentum angular diberikan sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}\,, \tag{8}$$

yang dalam representasi posisi diperoleh sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i}\nabla\,. \tag{9}$$

Dalam kerangka Cartesian, persamaan (8) dan (9) dapat diuraikan menjadi:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}} &= \hat{\mathbf{e}}_x(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \hat{\mathbf{e}}_y(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \hat{\mathbf{e}}_z(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) && (10)\\
&= \hat{\mathbf{e}}_x\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) && (11)\\
&= \hat{\mathbf{e}}_x\hat{L}_x + \hat{\mathbf{e}}_y\hat{L}_y + \hat{\mathbf{e}}_z\hat{L}_z\,, && (12)
\end{aligned}$$

dengan demikian, komponen-komponen momentum angular dalam kerangka Cartesian adalah:

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{13}$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{14}$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\,. \tag{15}$$

Sebagai operator besaran fisika, operator momentum angular dan komponen-komponennya bersifat hermitian, contoh:[2]

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x^+ = (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)^+ &= -\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)^+\\
= (\hat{y}\hat{p}_z)^+ - (\hat{z}\hat{p}_y)^+ &= -\frac{\hbar}{i}\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z}\right)^+ - \left(z\frac{\partial}{\partial y}\right)^+\right]\\
= \hat{p}_z^+\hat{y}^+ - \hat{p}_y^+\hat{z}^+ &= -\frac{\hbar}{i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^+ y^+ - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^+ z^+\right]
\end{aligned}$$

---

[2]Catatan:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar \tag{16}$$

$$[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{y}, \hat{y}] = [\hat{z}, \hat{z}] = [\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{x}, \hat{z}] = [\hat{y}, \hat{z}] = 0 \tag{17}$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_x] = [\hat{p}_y, \hat{p}_y] = [\hat{p}_z, \hat{p}_z] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_x, \hat{p}_z] = [\hat{p}_y, \hat{p}_z] = 0 \tag{18}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{z}, \hat{p}_x] = [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0\,. \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{p}_z\hat{y} - \hat{p}_y\hat{z} = -\frac{\hbar}{i}\left(\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)y - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)z\right) \\
&= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial z}y - \frac{\partial}{\partial y}z\right) \\
&= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \hat{L}_x\,. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Kita kerjakan relasi komutasi operator momentum angular dan komponen-komponennya:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] \\
&= [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] \\
&= \hat{y}\,[\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{y}, \hat{z}\hat{p}_x]\,\hat{p}_z - \hat{y}\,[\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] - [\hat{y}, \hat{x}\hat{p}_z]\,\hat{p}_z \\
&\quad - \hat{z}\,[\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{z}, \hat{z}\hat{p}_x]\,\hat{p}_y + \hat{z}\,[\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] + [\hat{z}, \hat{x}\hat{p}_z]\,\hat{p}_y \\
&= \hat{y}\hat{z}\,[\hat{p}_z, \hat{p}_x] + \hat{y}\,[\hat{p}_z, \hat{z}]\,\hat{p}_x + \hat{z}\,[\hat{y}, \hat{p}_x]\,\hat{p}_z + [\hat{y}, \hat{z}]\,\hat{p}_x\hat{p}_z \\
&\quad - \hat{y}\hat{x}\,[\hat{p}_z, \hat{p}_z] - \hat{y}\,[\hat{p}_z, \hat{x}]\,\hat{p}_z - \hat{x}\,[\hat{y}, \hat{p}_z]\,\hat{p}_z - [\hat{y}, \hat{x}]\,\hat{p}_z\hat{p}_z \\
&\quad - \hat{z}\hat{z}\,[\hat{p}_y, \hat{p}_x] - \hat{z}\,[\hat{p}_y, \hat{z}]\,\hat{p}_x - \hat{z}\,[\hat{z}, \hat{p}_x]\,\hat{p}_y - [\hat{z}, \hat{z}]\,\hat{p}_x\hat{p}_y \\
&\quad + \hat{z}\hat{x}\,[\hat{p}_y, \hat{p}_z] + \hat{z}\,[\hat{p}_y, \hat{x}]\,\hat{p}_z + \hat{x}\,[\hat{z}, \hat{p}_z]\,\hat{p}_y + [\hat{z}, \hat{x}]\,\hat{p}_z\hat{p}_y \\
&= \hat{y}\,[\hat{p}_z, \hat{z}]\,\hat{p}_x + \hat{x}\,[\hat{z}, \hat{p}_z]\,\hat{p}_y \\
&= \hat{x}\,[\hat{z}, \hat{p}_z]\,\hat{p}_y - \hat{y}\,[\hat{z}, \hat{p}_z]\,\hat{p}_x \\
&= i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) \\
&= i\hbar\hat{L}_z \qquad (21) \\
\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] &= i\hbar\hat{L}_x \qquad (22) \\
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] &= i\hbar\hat{L}_y \qquad (23) \\
\to \left[\hat{L}_r, \hat{L}_s\right] &= i\hbar\epsilon_{rst}\hat{L}_t,\ ,\ (\epsilon_{rst} = \text{simbol Levi-Civita}) \qquad (24) \\
\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_x\right] &= \left[\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_x\right] \\
&= \left[\hat{L}_x^2, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x\right] \\
&= \hat{L}_y\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right]\hat{L}_y + \hat{L}_z\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right]\hat{L}_z \\
&= -i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z - i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z \\
&= 0 \qquad (25) \\
\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_y\right] &= 0 \qquad (26) \\
\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z\right] &= 0 \qquad (27) \\
\to \left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_r\right] &= 0\,,\ (\hat{L}_r = \text{ sembarang komponen } \hat{\mathbf{L}})\,. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Kita lihat persamaan (24) bahwa sesama komponen momentum angular tidak komut dan persamaan (28) bahwa tiap komponen momentum angular komut dengan $\hat{\mathbf{L}}^2$ (operator $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$

memberi informasi tentang besar atau nilai momentum angular). Perhatikan bahwa komponen momentum angular tidak harus komponen Cartesian, melainkan proyeksi momentum angular pada suatu sumbu sembarang. Ambil saja $\hat{L}_x$, yang merupakan proyeksi momentum angular pada sumbu x. Kita tahu bahwa sumbu x tidak unik, orang dapat tentukan sumbu x sepanjang sembarang arah. Dengan demikian, secara umum dapat dikatakan bahwa proyeksi momentum angular pada suatu sumbu sembarang (komponen momentum angular pada suatu sumbu sembarang) komut dengan $\hat{\mathbf{L}}^2$.

Kembali ke komponen Cartesian momentum angular. Sesuai persamaan (28), $\hat{\mathbf{L}}^2$ dan $\hat{L}_x$ memiliki keadaan eigen simultan, demikan pula, $\hat{\mathbf{L}}^2$ dan $\hat{L}_y$ serta $\hat{\mathbf{L}}^2$ dan $\hat{L}_z$. Namun, menurut persamaan (24), $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, dan $\hat{L}_z$ tidak punya keadaan eigen simultan. Dengan demikian, informasi terbanyak mengenai momentum angular suatu sistem yang dapat diperoleh secara bersamaan dengan hasil pasti adalah nilai momentum angular (melalui operator $\hat{\mathbf{L}}^2$) dan hanya salah satu komponennya, entah itu komponen x, komponen y, atau komponen z, masing-masing melalui operator $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, atau $\hat{L}_z$. Kita dapat saja mencoba menganggap $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, dan $\hat{L}_z$ punya keadaan eigen simultan, misalkan $|u\rangle$, namun (lihat Gasiorowicz) kosekuensinya nilai momentum angular sama dengan nol:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x|u\rangle &= l_1|u\rangle && (29)\\
\hat{L}_y|u\rangle &= l_2|u\rangle && (30)\\
\to \hat{L}_z|u\rangle &= \frac{i}{\hbar}\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right]|u\rangle \\
&= \hat{L}_y\hat{L}_x|u\rangle - \hat{L}_x\hat{L}_y|u\rangle \\
&= l_1\hat{L}_y|u\rangle - l_2\hat{L}_x|u\rangle \\
&= l_1 l_2|u\rangle - l_1 l_2|u\rangle \\
&= 0 && (31)\\
\to \hat{L}_x|u\rangle &= \frac{i}{\hbar}\left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right]|u\rangle \\
l_1|u\rangle &= \hat{L}_z\hat{L}_y|u\rangle - \hat{L}_y\hat{L}_z|u\rangle \\
&= l_2\hat{L}_z|u\rangle - 0 \\
&= 0 \\
\to l_1 &= 0 && (32)\\
\to \hat{L}_y|u\rangle &= \frac{i}{\hbar}\left[\hat{L}_x, \hat{L}_z\right]|u\rangle \\
l_2|u\rangle &= \hat{L}_x\hat{L}_z|u\rangle - \hat{L}_z\hat{L}_x|u\rangle \\
&= 0 - l_1\hat{L}_z|u\rangle \\
&= 0 \\
\to l_2 &= 0 && (33)\\
\to \hat{L}_x|u\rangle &= \hat{L}_y|u\rangle = \hat{L}_z|u\rangle = 0 && (34)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \hat{\mathbf{L}}^2|u\rangle &= \hat{L}_x^2|u\rangle + \hat{L}_y^2|u\rangle + \hat{L}_z^2|u\rangle \\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Singkatnya, hanya dua informasi yang dapat diperoleh secara bersamaan, yaitu nilai momentum angular dan arahnya relatif terhadap salah satu sumbu. Komponen yang dipilih adalah komponen z.[3] Keadaan eigen simultan $\hat{\mathbf{L}}^2$ dan $\hat{L}_z$ haruslah memiliki label (biasanya bilangan kuantum) yang menunjukkan nilai eigen $\hat{\mathbf{L}}^2$ dan $\hat{L}_z$. Keadaan eigen tersebut biasa dituliskan sebagai $|lm\rangle$, yang memenuhi persamaan nilai eigen berikut:

$$
\hat{\mathbf{L}}^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle \tag{36}
$$

$$
\hat{L}_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle\,, \tag{37}
$$

dengan l bilangan kuantum yang menyatakan panjang / besar / nilai momentum angular dan m bilangan kuantum yang menyatakan panjang / besar / nilai komponen z momentum angular. Momentum angular dinyatakan dalam satuan $\hbar$, dengan demikian, l dan m merupakan nilai tanpa satuan. Ortogonalitas keadaan eigen momentum angular $|lm\rangle$ diberikan sebagai berikut:

$$
\langle l'm'|lm\rangle = \delta_{l'l}\delta_{m'm}\,. \tag{38}
$$

Untuk keadaan $|lm\rangle$ nilai ekspektasi $\hat{\mathbf{L}}^2$ adalah:

$$
\begin{aligned}
\langle lm|\hat{\mathbf{L}}^2|lm\rangle &= \langle lm|\hat{L}_x^2|lm\rangle + \langle lm|\hat{L}_y^2|lm\rangle + \langle lm|\hat{L}_z^2|lm\rangle \\
\hbar^2 l(l+1)\langle lm|lm\rangle &= \langle \hat{L}_x\ lm|\hat{L}_x\ lm\rangle + \langle \hat{L}_y\ lm|\hat{L}_y\ lm\rangle + \langle \hat{L}_z\ lm|\hat{L}_z\ lm\rangle \\
\hbar^2 l(l+1) &\geqslant 0\,,\ \text{(kuadrat norm sembarang vektor } \geqslant 0) \\
\rightarrow l(l+1) &\geqslant 0 && (39) \\
\rightarrow l &\geqslant 0 \text{ atau } l \leqslant -1\,. && (40)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, ada dua pilihan, $l \geqslant 0$ atau $l \leqslant -1$. Namun, untuk $l \leqslant -1$ kita dapat saja definisikan label baru $l' = -(l+1)$, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
l' &= -(l+1) \\
l' + 1 &= -l \\
&\geqslant 1 \\
\rightarrow l' &\geqslant 0\,.
\end{aligned} \tag{41}
$$

Jadi, kembali kita dapatkan label dengan sifat $\geqslant 0$, yaitu $l' \geqslant 0$. Dengan demikian, dari dua kemungkinan di persamaan (40) dipilih satu saja, yaitu $l \geqslant 0$. Lebih detil, l bernilai bulat[4] 0,

[3] Mengapa dipilih komponen z, bukan komponen x atau komponen y? Mungkin karena perhitungan-perhitungan banyak dikerjakan secara lebih sederhana dalam kerangka koordinat bola dan dalam kerangka tersebut komponen z lebih sederhana dihitung daripada komponen x maupun komponen y.

[4] Pada materi ini momentum angular yang dibahas adalah momentum angular orbital, yang nilainya bulat. Secara umum, momentum angular dapat bernilai bulat dan kelipatan ganjil dari setengah (*half-odd*). Spin juga merupakan momentum angular dan, sebagai contoh, spin elektron bernilai setengah.

1, 2, 3, ... dan m bernilai dari $-l$ sampai l, dengan jarak $|\Delta m| = 1$ (kita akan lihat tentang hal ini). Relasi kekomplitan keadaan eigen momentum angular $|lm\rangle$ diberikan sebagai berikut:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} |lm\rangle\langle lm| = \hat{1}\,. \tag{42}$$

Sampai di sini kita dapatkan tiga operator yang membentuk satu himpunan besaran atau operator komut, yaitu H, $\hat{\mathbf{L}}^2$, dan $\hat{L}_z$. Untuk ketiganya ada keadaan eigen simultan, sebut saja $|Elm\rangle$, dengan E adalah nilai eigen H.

C. Operator naik dan operator turun untuk momentum angular

Pada pembahasan osilator harmonik kita temui operator tangga atau operator naik dan operator turun. Untuk momentum angular juga dipakai operator naik dan operator turun, yaitu berturut-turut $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\,. \tag{43}$$

Operator $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$ tidak bersifat hermitian:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_\pm^+ &= \left(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right)^+ \\
&= \hat{L}_x^+ \mp i\hat{L}_y^+ \\
&= \hat{L}_x \mp i\hat{L}_y \\
&= \hat{L}_\mp\,.
\end{aligned} \tag{44}$$

Beberapa relasi serta komutator untuk $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] &= \left[\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_x - i\hat{L}_y\right] \\
&= \left[\hat{L}_x, \hat{L}_x\right] - i\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] + i\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y, \hat{L}_y\right] \\
&= -2i\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] \\
&= 2\hbar\hat{L}_z
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] &= \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right] \\
&= \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] \pm i\left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] \\
&= i\hbar\hat{L}_y \pm \hbar\hat{L}_x \\
&= \pm\hbar\left(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right) \\
&= \pm\hbar\hat{L}_\pm
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_\pm\right] &= \left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right] \\
&= \left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_x\right] \pm i\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_y\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{47}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_\pm \hat{L}_\mp &= \left(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x \mp i\hat{L}_y\right) \\
&= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \mp i\hat{L}_x\hat{L}_y \pm i\hat{L}_y\hat{L}_x \\
&= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z^2 \mp i\left(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x\right) \\
&= \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \mp i\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] \\
&= \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z\,.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Kita lihat kerja $\hat{L}_\pm$ pada $|lm\rangle$, pertama dengan mengukur nilai $\hat{\mathbf{L}}^2$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2\hat{L}_\pm|lm\rangle &= \hat{L}_\pm\hat{\mathbf{L}}^2|lm\rangle \\
&= \hbar^2 l(l+1)\hat{L}_\pm|lm\rangle \\
\rightarrow \hat{L}_\pm|lm\rangle &\propto |lm'\rangle\,,\ (m' = ?)\,.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Dengan demikian, $\hat{L}_\pm$ tidak mengubah keadaan sistem berkenaan dengan nilai momentum angular l, namun belum diketahui apakah demikian pula berkenaan dengan nilai komponen z momentum angular m. Kini kita lihat kerja $\hat{L}_\pm$ pada $|lm\rangle$ dengan mengukur nilai $\hat{L}_z$:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_z\hat{L}_\pm|lm\rangle &= \hat{L}_\pm\hat{L}_z|lm\rangle + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right]|lm\rangle \\
&= \hbar m\hat{L}_\pm|lm\rangle \pm \hbar\hat{L}_\pm|lm\rangle \\
&= \hbar(m \pm 1)\hat{L}_\pm|lm\rangle \\
\rightarrow \hat{L}_\pm|lm\rangle &\propto |l, m \pm 1\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Dengan demikian, $\hat{L}_\pm$ tidak mengubah keadaan sistem berkenaan dengan nilai momentum angular l, namun mengubah keadaan sistem berkenaan dengan nilai komponen z momentum angular dari m menjadi $m \pm 1$:

$$
\hat{L}_\pm|lm\rangle = C_\pm(lm)|l, m \pm 1\rangle\,,
\tag{51}
$$

dengan $C_\pm(lm)$ dicari berikut ini.

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{L}_\pm\ lm|\hat{L}_\pm|lm\rangle &= \langle C_\pm(lm)\ lm|C_\pm(lm)|lm\rangle \\
&= C_\pm^*(lm)C_\pm(lm)\langle lm|lm\rangle \\
&= |C_\pm(lm)|^2 \qquad (52) \\
\langle\hat{L}_\pm\ lm|\hat{L}_\pm|lm\rangle &= \langle lm|\hat{L}_\pm^+\hat{L}_\pm|lm\rangle \\
&= \langle lm|\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm|lm\rangle \\
&= \langle lm|\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z|lm\rangle \\
&= \left(\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m\right)\langle lm|lm\rangle \\
&= \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m \\
&= \hbar^2(l^2 - m^2 + l \mp m) = \hbar^2\left[l(l+1) - m(m \pm 1)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \hbar^2((l \mp m)(l \pm m) + l \mp m) = \hbar^2 \left[l(l+1) - m(m \pm 1) \right] \\
&= \hbar^2(l \mp m)(l \pm m + 1) = \hbar^2 \left[l(l+1) - m(m \pm 1) \right] \qquad (53) \\
\rightarrow C_\pm(lm) &= \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Jadi:

$$
\hat{L}_\pm |lm\rangle = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle\,. \qquad (55)
$$

Kuadrat norm sembarang vektor bernilai positif atau nol, dengan demikian:

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{L}_\pm\, lm | \hat{L}_\pm | lm \rangle = \hbar^2 \left[l(l+1) - m(m \pm 1) \right] &\geqslant 0 \\
\rightarrow l(l+1) - m(m \pm 1) &\geqslant 0 \\
\rightarrow l(l+1) &\geqslant \begin{cases} m(m+1) \\ m(m-1) \end{cases} \\
&\geqslant \begin{cases} m(m+1) \\ -m(-m+1) \end{cases} \\
\rightarrow l &\geqslant \begin{cases} m \\ -m \end{cases}
\end{aligned}
$$

dan diperoleh daerah nilai m:

$$
-l \leqslant m \leqslant l\,. \qquad (56)
$$

Batas terendah dan tertinggi untuk m juga dapat dicari sebagai berikut. Jika m tidak dapat lebih dari suatu nilai m_+ dan tidak dapat kurang dari suatu nilai m_-, maka:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_\pm |lm_\pm\rangle &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m_\pm(m_\pm \pm 1)} |l, m_\pm \pm 1\rangle = 0 \\
\rightarrow m_+(m_+ + 1) &= l(l+1) \\
m_+ &= l \qquad (57) \\
\rightarrow m_-(m_- - 1) &= l(l+1) = -l(-l-1) \\
m_- &= -l\,. \qquad (58)
\end{aligned}
$$

Kita sudah lihat bahwa $\hat{L}_\pm$ mengubah keadaan sistem dengan perubahan nilai m sebesar $\Delta m \pm 1$, sedangkan nilai l tetap. Dengan demikian, nilai-nilai m adalah:

$$
m = -l, -l+1, -l+2, ..., l-2, l-1, l\,. \qquad (59)
$$

Jadi, untuk keadaan momentum angular dengan nilai l tertentu terdapat $2l+1$ keadaan dengan nilai m berbeda. Ini merupakan contoh degenerasi.[5]

[5] Persamaan (56) dan (59) berlaku umum untuk momentum angular bernilai bulat maupun kelipatan ganjil dari setengah. Untuk momentum angular bernilai j, dengan demikian, terdapat degenerasi $2j+1$.

D. Keadaan eigen momentum angular dalam koordinat bola

Pertama-tama, sedikit catatan. Bekerja dalam koordinat bola bukan berarti dengan sendirinya bekerja dalam representasi atau ruang posisi. Kita dapat bekerja di ruang posisi dengan pilihan untuk menggunakan koordinat Cartesian, koordinat silinder, koordinat bola dan lain-lain. Demikian pula, bekerja di ruang momentum pun kita dapat menggunakan koordinat Cartesian, koordinat silinder, koordinat bola dan lain-lain. Dalam koordinat bola di ruang posisi, sudut latitude θ (diukur relatif terhadap sumbu z^+) bersama dengan sudut azimuth ϕ (diukur relatif terhadap sumbu x^+ pada bidang xy) menentukan arah suatu titik di ruang posisi terhadap pusat koordinat. Serupa dengan itu, dalam koordinat bola di ruang momentum, sudut latitude θ bersama dengan sudut azimuth ϕ menentukan arah suatu titik di ruang momentum terhadap pusat koordinat. Dalam koordinat bola keadaan (fungsi gelombang) eigen momentum angular dinyatakan dalam dua sudut tersebut, θ dan ϕ, dengan kata lain dalam variabel-variabel arah.

Vektor posisi dapat ditulis sebagai $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, dengan r panjang vektor dan $\hat{\mathbf{r}}$ arahnya. Demikian pula dengan vektor momentum $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{p}}$. Dengan demikian, keadaan basis posisi $|\mathbf{r}\rangle$ dan keadaan basis momentum $|\mathbf{p}\rangle$ dapat dinyatakan sebagai:

$$|\mathbf{r}\rangle = |r\rangle|\hat{\mathbf{r}}\rangle = |r\rangle|\theta,\phi\rangle \quad \text{dan} \quad |\mathbf{p}\rangle = |p\rangle|\hat{\mathbf{p}}\rangle = |p\rangle|\theta,\phi\rangle\,. \tag{60}$$

Untuk mendapatkan ortogonalitas serta relasi kekomplitan $|\mathbf{r}\rangle$ dan $|\mathbf{p}\rangle$ dalam koordinat bola, kita cari dahulu fungsi delta Dirac dalam koordinat bola. Ambillah ruang posisi, sesuai definisi fungsi delta Dirac, maka:

$$\int d\mathbf{r}\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \int_0^\infty dr\,\delta(r'-r)\int d\hat{\mathbf{r}}\,\delta(\hat{\mathbf{r}}'-\hat{\mathbf{r}}) \tag{61}$$

$$= \int_0^\infty dr\,\delta(r'-r)\int_0^\pi d\theta\,\delta(\theta'-\theta)\int_0^{2\pi} d\phi\,\delta(\phi'-\phi)\,. \tag{62}$$

Sedangkan menurut koordinat bola:

$$\int d\mathbf{r}\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \int_0^\infty dr\,r^2\int d\hat{\mathbf{r}}\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \tag{63}$$

$$= \int_0^\infty dr\,r^2\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\,. \tag{64}$$

Bandingkan persamaan (63) dengan persamaan (61) dan persamaan (64) dengan persamaan (62), diperoleh:

$$\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \frac{\delta(r'-r)}{r^2}\delta(\hat{\mathbf{r}}'-\hat{\mathbf{r}}) \tag{65}$$

$$= \frac{\delta(r'-r)}{r^2}\frac{\delta(\theta'-\theta)}{\sin\theta}\delta(\phi'-\phi)\,. \tag{66}$$

Perhatikan bahwa dapat pula dijumpai ekspresi yang sepertinya berbeda, namun sebetulnya sama:

$$\frac{\delta(r'-r)}{r^2} = \frac{\delta(r'-r)}{r'^2} = \frac{\delta(r'-r)}{r'r}\,. \tag{67}$$

Hal yang sama diperoleh untuk $\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$:

$$\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \frac{\delta(p' - p)}{p^2}\delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}) \tag{68}$$

$$= \frac{\delta(p' - p)}{p^2}\frac{\delta(\theta' - \theta)}{\sin\theta}\delta(\phi' - \phi)\,. \tag{69}$$

Ortogonalitas dan relasi kekomplitan untuk keadaan basis $|\mathbf{r}\rangle$ dalam koordinat bola diperoleh sebagai berikut (untuk keadaan basis $|\mathbf{p}\rangle$ diperoleh ekspresi serupa):

$$\langle \mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle = \langle r'|r\rangle\langle \hat{\mathbf{r}}'|\hat{\mathbf{r}}\rangle = \langle r'|r\rangle\langle \theta', \phi'|\theta, \phi\rangle \tag{70}$$

$$\rightarrow \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{\delta(r' - r)}{r^2}\delta(\hat{\mathbf{r}}' - \hat{\mathbf{r}}) = \frac{\delta(r' - r)}{r^2}\frac{\delta(\theta' - \theta)}{\sin\theta}\delta(\phi' - \phi) \tag{71}$$

$$\rightarrow \langle r'|r\rangle = \frac{\delta(r' - r)}{r^2} \tag{72}$$

$$\rightarrow \langle \hat{\mathbf{r}}'|\hat{\mathbf{r}}\rangle = \delta(\hat{\mathbf{r}}' - \hat{\mathbf{r}}) \tag{73}$$

$$\rightarrow \langle \theta', \phi'|\theta, \phi\rangle = \frac{\delta(\theta' - \theta)}{\sin\theta}\delta(\phi' - \phi)\,. \tag{74}$$

$$\int d\mathbf{r}\,|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| = \hat{1} = \int_0^\infty dr\, r^2|r\rangle\langle r|\int d\hat{\mathbf{r}}\,|\hat{\mathbf{r}}\rangle\langle\hat{\mathbf{r}}| = \hat{1}\cdot\hat{1}$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^2|r\rangle\langle r|\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| = \hat{1}\cdot\hat{1}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dr\, r^2|r\rangle\langle r| = \hat{1} \tag{75}$$

$$\rightarrow \int d\hat{\mathbf{r}}\,|\hat{\mathbf{r}}\rangle\langle\hat{\mathbf{r}}| = \hat{1} \tag{76}$$

$$\rightarrow \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| = \hat{1}\,. \tag{77}$$

Untuk menyatakan keadaan eigen momentum angular dalam representasi posisi digunakan keadaan basis $|\hat{\mathbf{r}}\rangle$ dan dalam representasi momentum digunakan keadaan basis $|\hat{\mathbf{p}}\rangle$. Fungsi gelombang eigen momentum angular, baik di ruang posisi maupun di ruang momentum, dikenal sebagai fungsi harmonik bola (*spherical harmonic function*):

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \langle\hat{\mathbf{r}}|lm\rangle \quad \text{dan} \quad Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) = \langle\hat{\mathbf{p}}|lm\rangle \tag{78}$$

atau:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle\theta, \phi|lm\rangle\,. \tag{79}$$

Ortogonalitas $Y_{lm}(\theta, \phi)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\langle l'm'|lm\rangle = \delta_{l'l}\delta_{m'm}$$

$$\langle l'm'|lm\rangle = \langle l'm'|\hat{1}|lm\rangle$$

$$= \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,\langle l'm'|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi|lm\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \langle\theta,\phi|l'm'\rangle^* \langle\theta,\phi|lm\rangle \\
&= \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}\,. \tag{80}
$$

Dengan cara yang serupa diperoleh:

$$
\int d\hat{\mathbf{r}}\, Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{l'l}\delta_{m'm} \tag{81}
$$

$$
\int d\hat{\mathbf{p}}\, Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}\,. \tag{82}
$$

Relasi kekomplitan $Y_{lm}(\theta,\phi)$ diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\langle\theta',\phi'|\sum_{lm}|lm\rangle\langle lm|\theta,\phi\rangle &= \langle\theta',\phi'|\hat{1}|\theta,\phi\rangle \\
&= \langle\theta',\phi'|\theta,\phi\rangle \\
&= \frac{\delta(\theta'-\theta)}{\sin\theta}\delta(\phi'-\phi) \\
\langle\theta',\phi'|\sum_{lm}|lm\rangle\langle lm|\theta,\phi\rangle &= \sum_{lm}\int_0^{\pi} d\theta'''\, \sin\theta''' \int_0^{2\pi} d\phi'''\, \langle\theta',\phi'|\theta''',\phi'''\rangle\langle\theta''',\phi'''|lm\rangle \\
&\quad \times \int_0^{\pi} d\theta''\, \sin\theta'' \int_0^{2\pi} d\phi''\, \langle lm|\theta'',\phi''\rangle\langle\theta'',\phi''|\theta,\phi\rangle \\
&= \sum_{lm}\int_0^{\pi} d\theta'''\, \sin\theta''' \int_0^{2\pi} d\phi'''\, \frac{\delta(\theta'-\theta''')}{\sin\theta'''}\delta(\phi'-\phi''')Y_{lm}(\theta''',\phi''') \\
&\quad \times \int_0^{\pi} d\theta''\, \sin\theta'' \int_0^{2\pi} d\phi''\, Y^*_{lm}(\theta'',\phi'')\frac{\delta(\theta''-\theta)}{\sin\theta}\delta(\phi''-\phi) \\
&= \sum_{lm} Y_{lm}(\theta',\phi')Y^*_{lm}(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \sum_{lm} Y_{lm}(\theta',\phi')Y^*_{lm}(\theta,\phi) = \frac{\delta(\theta'-\theta)}{\sin\theta}\delta(\phi'-\phi)\,. \tag{83}
$$

Dengan cara yang serupa diperoleh:

$$
\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}')Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta(\hat{\mathbf{r}}'-\hat{\mathbf{r}}) \tag{84}
$$

$$
\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}')Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) = \delta(\hat{\mathbf{p}}'-\hat{\mathbf{p}})\,. \tag{85}
$$

Fungsi harmonik bola $Y_{lm}(\theta,\phi)$ diperoleh sebagai fungsi θ dan ϕ sebagai berikut:

$$
Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}\,, \tag{86}
$$

dengan $P_l^m(\cos\theta)$ polinomial Legendre terasosiasi (*associated Legendre polynomial*). Fungsi harmonik bola $Y_{lm}(\theta,\phi)$ menunjukkan relasi berikut:

$$
Y_{l,-m} = (-1)^m Y^*_{lm}\,. \tag{87}
$$

E. Ekspansi dalam keadaan eigen momentum angular

Sebagai keadaan eigen momentum angular, $|lm\rangle$ bersifat ortogonal dan komplit, sehingga dapat dipakai sebagai keadaan basis. Sembarang keadaan momentum angular $|\psi\rangle$ dapat diekspansi dalam $|lm\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \hat{1}|\psi\rangle \\ &= \sum_{lm} |lm\rangle\langle lm|\psi\rangle \\ &= \sum_{lm} C_{lm}|lm\rangle \,, \end{aligned} \tag{88}$$

dengan:

$$C_{lm} = \langle lm|\psi\rangle \,. \tag{89}$$

Dalam koordinat bola, ekspansi tersebut diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(\theta,\phi) &= \langle \theta,\phi|\psi\rangle \\ &= \langle \theta,\phi|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= \sum_{lm} \langle \theta,\phi|lm\rangle\langle lm|\psi\rangle \\ &= \sum_{lm} C_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \,, \end{aligned} \tag{90}$$

dengan:

$$\begin{aligned} C_{lm} &= \langle lm|\psi\rangle \\ &= \langle lm|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \langle lm|\theta,\phi\rangle\langle \theta,\phi|\psi\rangle \\ &= \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, Y^*_{lm}(\theta,\phi)\psi(\theta,\phi) \,. \end{aligned} \tag{91}$$