Catatan Mekanika Kuantum 1

Metode Operator, Kebergantungan pada Waktu untuk Operator

Acuan utama Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 6, Subbab 2 – 4

## A. Metode operator, contoh pada osilator harmonik

Sebelum ini kita mendapatkan keadaan dan energi sistem dengan menyelesaikan persamaan Schrödinger dalam representasi posisi sebagai persamaan differensial. Kali ini kita lihat cara lain, yang dikerjakan bukan dalam representasi apapun, dengan demikian, kita gunakan notasi Dirac. Cara ini disebut metode operator dan, sebagai contoh, kita pakai untuk menghitung osilator harmonik.

Kita mulai dengan hamiltonian osilator harmonik, yaitu:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \,. \tag{1}$$

dengan $\omega$ frekuensi osilasi, $\hat{p}$ dan $\hat{x}$ berturut-turut adalah operator momentum linier dan operator posisi. Kita ubah sedikit penulisan $H$ menjadi:

$$H = \omega\left(\frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m\omega}\right) \,. \tag{2}$$

Kita ingat bahwa:

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) \tag{3}$$

dan kita coba pada $H$ (perhatikan bahwa urutan operator penting):

$$\begin{aligned}
\omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\hat{p}\right) &= \omega\left(\frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m\omega} + \frac{i}{2}\hat{x}\hat{p} - \frac{i}{2}\hat{p}\hat{x}\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m\omega} + \frac{i}{2}\left[\hat{x},\hat{p}\right]\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m\omega} - \frac{1}{2}\hbar\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m\omega}\right) - \frac{1}{2}\hbar\omega \\
&= H - \frac{1}{2}\hbar\omega \\
&\neq H \,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Hasil yang kita peroleh di persamaan (4) tidak sesuai dengan persamaan (3), karena persamaan (3) berlaku untuk variabel atau bilangan, bukan operator; perkalian variabel atau bilangan bersifat komutatif. Persamaan (4) dikerjakan untuk operator, yaitu $\hat{p}$ dan $\hat{x}$, dan kedua operator itu tidak komut ($[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$). Andaikan $\hat{p}$ dan $\hat{x}$ komut, kita dapatkan hasil yang sesuai dengan persamaan (3). Persamaan (4) tetap kita pakai untuk menyatakan $H$:

$$\begin{aligned} H &= \omega \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\hat{p} \right) \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\hat{p} \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \hbar\omega \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \right) \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Kita definisikan operator baru $\hat{A}$ dan hermitian konjugatnya, $\hat{A}^+$ (ingat bahwa operator posisi dan momentum linier hermitian, sehingga $\hat{x}^+ = \hat{x}$ dan $\hat{p}^+ = \hat{p}$):

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \quad \text{dan} \quad \hat{A}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \tag{6}$$

dan hamiltonian osilator harmonik dapat dituliskan sebagai:

$$H = \hbar\omega\hat{A}^+\hat{A} + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega\left(\hat{A}^+\hat{A} + \frac{1}{2}\right) \,. \tag{7}$$

Komutator-komutator untuk $\hat{A}$, $\hat{A}^+$, dan $H$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}, \hat{A}^+\right] &= \left[ \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{x}] + \frac{1}{2m\omega\hbar}[\hat{p}, \hat{p}] + \frac{-i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] \\ &= \frac{-i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] \\ &= \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] \\ &= \frac{i}{\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] \\ &= \hat{1} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \left[H, \hat{A}\right] &= \hbar\omega\left[\hat{A}^+\hat{A} + \frac{1}{2}, \hat{A}\right] \\ &= \hbar\omega\left[\hat{A}^+\hat{A}, \hat{A}\right] \\ &= \hbar\omega\hat{A}^+\left[\hat{A}, \hat{A}\right] + \hbar\omega\left[\hat{A}^+, \hat{A}\right]\hat{A} \\ &= \hbar\omega\left[\hat{A}^+, \hat{A}\right]\hat{A} \\ &= -\hbar\omega\left[\hat{A}, \hat{A}^+\right]\hat{A} \\ &= -\hbar\omega\hat{A} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \left[H, \hat{A}^+\right] &= \hbar\omega\left[\hat{A}^+\hat{A} + \frac{1}{2}, \hat{A}^+\right] \\ &= \hbar\omega\left[\hat{A}^+\hat{A}, \hat{A}^+\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hbar\omega \hat{A}^{+}\left[\hat{A}, \hat{A}^{+}\right] + \hbar\omega\left[\hat{A}^{+}, \hat{A}^{+}\right]\hat{A} \\
&= \hbar\omega \hat{A}^{+}\left[\hat{A}, \hat{A}^{+}\right] \\
&= \hbar\omega \hat{A}^{+}
\end{aligned} \tag{10}
$$

cara lain:

$$
\begin{aligned}
\left[H, \hat{A}^{+}\right] &= \left[H^{+}, \hat{A}^{+}\right] \\
&= H^{+}\hat{A}^{+} - \hat{A}^{+}H^{+} \\
&= \left(\hat{A}H\right)^{+} - \left(H\hat{A}\right)^{+} \\
&= \left(\hat{A}H - H\hat{A}\right)^{+} \\
&= \left[\hat{A}, H\right]^{+} \\
&= -\left[H, \hat{A}\right]^{+} \\
&= \hbar\omega \hat{A}^{+} \,.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Kini, kita hitung osilator harmonik. Ambillah $|E\rangle$ sebagai keadaan eigen hamiltonian osilator harmonik $H$ dengan nilai eigen $E$:

$$
H|E\rangle = E|E\rangle \,. \tag{12}
$$

Kita periksa operasi $\hat{A}$ pada $|E\rangle$ dengan menghitung energinya:

$$
\begin{aligned}
H\hat{A}|E\rangle &= \left(\hat{A}H + \left[H, \hat{A}\right]\right)|E\rangle \\
&= \left(\hat{A}H - \hbar\omega\hat{A}\right)|E\rangle \\
&= \hat{A}H|E\rangle - \hbar\omega\hat{A}|E\rangle \\
&= \hat{A}E|E\rangle - \hbar\omega\hat{A}|E\rangle \\
&= (E - \hbar\omega)\hat{A}|E\rangle
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\to \hat{A}|E\rangle \propto |E - \hbar\omega\rangle \,. \tag{14}
$$

Jadi, operasi $\hat{A}$ pada keadaan $|E\rangle$ menghasilkan keadaan yang energinya lebih rendah $|E - \hbar\omega\rangle$. Operasi $\hat{A}$ yang kedua kali menghasilkan:

$$
\begin{aligned}
H\hat{A}^{2}|E\rangle &= H\hat{A}\hat{A}|E\rangle \\
&\propto H\hat{A}|E - \hbar\omega\rangle \\
&\propto \left(\hat{A}H + \left[H, \hat{A}\right]\right)|E - \hbar\omega\rangle \\
&\propto \left(\hat{A}H - \hbar\omega\hat{A}\right)|E - \hbar\omega\rangle \\
&\propto \hat{A}H|E - \hbar\omega\rangle - \hbar\omega\hat{A}|E - \hbar\omega\rangle \\
&\propto \hat{A}(E - \hbar\omega)|E - \hbar\omega\rangle - \hbar\omega\hat{A}|E - \hbar\omega\rangle \\
&\propto (E - 2\hbar\omega)\hat{A}|E - \hbar\omega\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\propto (E-2\hbar\omega)\hat{A}^2|E\rangle && (15)\\
\rightarrow \hat{A}^2|E\rangle &\propto |E-2\hbar\omega\rangle\,. && (16)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian:

$$\hat{A}^n|E\rangle \propto |E-n\hbar\omega\rangle\,. \tag{17}$$

Kini, kita periksa operasi $\hat{A}^+$ pada $|E\rangle$ dengan menghitung energinya:

$$
\begin{aligned}
H\hat{A}^+|E\rangle &= \left(\hat{A}^+H + \left[H,\hat{A}^+\right]\right)|E\rangle\\
&= \left(\hat{A}^+H + \hbar\omega\hat{A}^+\right)|E\rangle\\
&= \hat{A}^+H|E\rangle + \hbar\omega\hat{A}^+|E\rangle\\
&= \hat{A}^+E|E\rangle + \hbar\omega\hat{A}^+|E\rangle\\
&= (E+\hbar\omega)\hat{A}^+|E\rangle && (18)\\
\rightarrow \hat{A}^+|E\rangle &\propto |E+\hbar\omega\rangle\,. && (19)
\end{aligned}
$$

Jadi, operasi $\hat{A}^+$ pada keadaan $|E\rangle$ menghasilkan keadaan yang energinya lebih tinggi $|E+\hbar\omega\rangle$. Operasi $\hat{A}^+$ yang kedua kali menghasilkan:

$$
\begin{aligned}
H\hat{A}^{+2}|E\rangle &= H\hat{A}^+\hat{A}^+|E\rangle\\
&\propto H\hat{A}^+|E+\hbar\omega\rangle\\
&\propto \left(\hat{A}^+H + \left[H,\hat{A}^+\right]\right)|E+\hbar\omega\rangle\\
&\propto \left(\hat{A}^+H + \hbar\omega\hat{A}^+\right)|E+\hbar\omega\rangle\\
&\propto \hat{A}^+H|E+\hbar\omega\rangle + \hbar\omega\hat{A}^+|E+\hbar\omega\rangle\\
&\propto \hat{A}^+(E+\hbar\omega)|E+\hbar\omega\rangle + \hbar\omega\hat{A}^+|E+\hbar\omega\rangle\\
&\propto (E+2\hbar\omega)\hat{A}^+|E+\hbar\omega\rangle\\
&\propto (E+2\hbar\omega)\hat{A}^{+2}|E\rangle && (20)\\
\rightarrow \hat{A}^{+2}|E\rangle &\propto |E+2\hbar\omega\rangle\,. && (21)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian:

$$\hat{A}^{+n}|E\rangle \propto |E+n\hbar\omega\rangle\,. \tag{22}$$

Operator $\hat{A}$ dan $\hat{A}^+$ membawa ke keadaan dengan energi lebih rendah dan lebih tinggi, tiap kali sebesar $\hbar\omega$. Dengan demikian, kita bayangkan ada tingkat-tingkat energi, dengan lebar antara dua tingkat yang berurutan adalah $\hbar\omega$. Operator $\hat{A}$ dan $\hat{A}^+$ disebut operator tangga (*ladder operator*).

Kita tahu bahwa untuk suatu sistem ada keadaan dengan energi terendah. Dengan demikian, kita tidak dapat terus menerus tanpa batas mengerjakan operator $\hat{A}$ untuk membawa ke keadaan dengan energi yang lebih rendah. Untuk osilator harmonik kita juga dapat lihat bahwa energinya tidak dapat negatif sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= \hbar\omega\left\langle\left(\hat{A}^+\hat{A}+\frac{1}{2}\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\langle\hat{A}^+\hat{A}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\langle\psi|\hat{A}^+\hat{A}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\langle\hat{A}\psi|\hat{A}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\hat{p}\psi|\hat{p}|\psi\rangle + \frac{i\omega}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{p}|\psi\rangle - \frac{i\omega}{2}\langle\hat{p}\psi|\hat{x}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\hat{p}\psi|\hat{p}|\psi\rangle + \frac{i\omega}{2}\langle\psi|\hat{x}\hat{p}|\psi\rangle - \frac{i\omega}{2}\langle\psi|\hat{p}\hat{x}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\hat{p}\psi|\hat{p}|\psi\rangle + \frac{i\omega}{2}\langle\psi|\,[\hat{x},\hat{p}]\,|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\hat{p}\psi|\hat{p}|\psi\rangle + \frac{i\omega}{2}\langle\psi|i\hbar|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\hat{p}\psi|\hat{p}|\psi\rangle - \frac{\hbar\omega}{2} \\
&= \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\hat{p}\psi|\hat{p}|\psi\rangle \\
&> 0\,,\ \text{(kuadrat norm sembarang vektor } > 0)\,. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Kini, sebut saja energi terendah itu $E_0$ dan keadaan dengan energi terendah (keadaan dasar, *groundstate*) $|E_0\rangle$, maka:

$$\hat{A}|E_0\rangle = 0\,. \qquad (24)$$

Kini kita cari nilai $E_0$:

$$
\begin{aligned}
H|E_0\rangle &= \hbar\omega\left(\hat{A}^+\hat{A}+\frac{1}{2}\right)|E_0\rangle \\
&= \hbar\omega\hat{A}^+\hat{A}|E_0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle \\
&= 0 + \frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle \\
&= E_0|E_0\rangle \qquad (25) \\
\rightarrow E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega\,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Sesuai persamaan (22), keadaan-keadaan lain dapat diperoleh dengan mengoperasikan $\hat{A}^+$ pada keadaan dasar berkali-kali:

$$
\begin{aligned}
\hat{A}^{+n}|E_0\rangle &\propto |E_0 + n\hbar\omega\rangle \\
&\propto \left|\frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega\right\rangle \\
&\propto \left|\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right\rangle \qquad (27)
\end{aligned}
$$

dan energi untuk keadaan itu diperoleh sebagai:

$$
\begin{aligned}
H\hat{A}^{+n}|E_0\rangle &\propto H\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right\rangle \\
&\propto \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right\rangle \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\hat{A}^{+n}|E_0\rangle \\
\to E &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Kita dapatkan $n$ sebagai bilangan kuantum dan keadaan serta energi osilator harmonik berturut-turut dapat dituliskan sebagai $|n\rangle$ dan $E_n$, dengan:

$$
H|n\rangle = E_n|n\rangle\,,\ E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,\ (n=0,1,2,...)\,. \qquad (29)
$$

Energi osilator harmonik, dengan demikian, tidak dapat sembarang, melainkan diskrit.

Kita pilih $|n\rangle$ ternormalisasi. Sebagai keadaan eigen operator besaran fisika, $|n\rangle$ bersifat ortognal dan komplit. Ortogonalitas $|n\rangle$ dan relasi kekomplitannya diberikan sebagai berikut:

$$
\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n} \qquad (30)
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1\,. \qquad (31)
$$

Sesuai persamaan (22):

$$
|n\rangle = C\hat{A}^{+n}|0\rangle\,, \qquad (32)
$$

dengan konstanta kesebandingan $C$ diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\hat{A}|0\rangle &= 0 \qquad (33) \\
\hat{A}\hat{A}^{+} &= \left[\hat{A},\hat{A}^{+}\right] + \hat{A}^{+}\hat{A} \\
&= \hat{1} + \hat{A}^{+}\hat{A} \qquad (34) \\
\to \langle n|n\rangle &= |C|^2\langle\hat{A}^{+n}\,0|\hat{A}^{+n}|0\rangle \\
&= |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n}\hat{A}^{+n}|0\rangle \\
&= |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}\hat{A}^{+}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle \\
&= |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\left(\hat{1}+\hat{A}^{+}\hat{A}\right)\hat{A}^{+n-1}|0\rangle \\
&= |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+}\hat{A}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle \\
&= |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+}\hat{A}\hat{A}^{+}\hat{A}^{+n-2}|0\rangle \\
&= |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+}\left(\hat{1}+\hat{A}^{+}\hat{A}\right)\hat{A}^{+n-2}|0\rangle \\
&= 2|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+2}\hat{A}\hat{A}^{+n-2}|0\rangle \\
&= 2|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+2}\hat{A}\hat{A}^{+}\hat{A}^{+n-3}|0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+2}\left(\hat{1}+\hat{A}^{+}\hat{A}\right)\hat{A}^{+n-3}|0\rangle \\
&= 3|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+3}\hat{A}\hat{A}^{+n-3}|0\rangle \\
&= ... \\
&= n|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle + |C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n}\hat{A}|0\rangle \\
&= n|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-1}\hat{A}^{+n-1}|0\rangle \\
&= n(n-1)|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-2}\hat{A}^{+n-2}|0\rangle \\
&= n(n-1)(n-2)|C|^2\langle 0|\hat{A}^{n-3}\hat{A}^{+n-3}|0\rangle \\
&= ... \\
&= n(n-1)(n-2)...2\ |C|^2\langle 0|\hat{A}\hat{A}^{+}|0\rangle \\
&= n(n-1)(n-2)...2\cdot 1\ |C|^2\langle 0|0\rangle \\
&= n!\ |C|^2 \\
&= 1 \qquad (35)
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,,\ \text{(supaya mudah dipilih riil)}\,. \qquad (36)
$$

Jadi:

$$
|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{A}^{+n}|0\rangle\,, \qquad (37)
$$

Fungsi gelombang untuk keadaan dasar dalam ruang posisi $u_0(x)$ dapat dicari sebagai berikut, kita ambil persamaan (33):

$$
\begin{aligned}
\langle x|\hat{A}|0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \langle x|\hat{A}|x'\rangle\langle x'|0\rangle \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \langle x|\hat{x}|x'\rangle u_0(x') + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp'\ \langle x|\hat{p}|p'\rangle\langle p'|x'\rangle u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ x'\langle x|x'\rangle u_0(x') + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp'\ p'\langle x|p'\rangle\langle p'|x'\rangle u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ x'\delta(x-x')u_0(x') \\
&\quad + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp'\ p'\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ip'x/\hbar}\langle p'|x'\rangle u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}xu_0(x) + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp'\ \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ip'x/\hbar}\langle p'|x'\rangle u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}xu_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp'\ \langle x|p'\rangle\langle p'|x'\rangle u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}xu_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \langle x|x'\rangle u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}xu_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \delta(x-x')u_0(x') \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}xu_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}u_0(x)
\end{aligned}
$$

$$= 0\,. \tag{38}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan differensial:

$$\frac{d}{dx}u_0(x) + \frac{m\omega}{\hbar}xu_0(x) = 0 \tag{39}$$

dan diperoleh $u_0(x)$ yang ternormalisasi sebagai berikut:

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-m\omega x^2/2\hbar}\,. \tag{40}$$

Fungsi gelombang untuk keadaan eksitasi dalam ruang posisi $u_n(x)$ dapat diperoleh menggunakan persamaan (37) dalam ruang posisi:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{A}^{+n}(x)u_0(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n e^{-m\omega x^2/2\hbar}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

**B. Kebergantungan pada waktu untuk operator**

Supaya sederhana, di sini kita pakai keadaan yang ternormalisasi.

Ambillah sebuah besaran $B$ dengan operatornya $\hat{B}$. Pengukuran besaran $B$ atau nilai ekspektasinya pada suatu waktu $t$ dihitung sebagai:

$$\langle B\rangle_t = \langle\psi(t)|\hat{B}|\psi(t)\rangle\,, \tag{42}$$

dengan $|\psi(t)\rangle$ adalah keadaan sistem pada waktu $t$, yang memenuhi persamaan Schrödinger:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle\,, \tag{43}$$

sehingga diperoleh:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle\,, \tag{44}$$

dengan $|\psi(0)\rangle$ adalah keadaan awal sistem. Penjabaran seperti ini (persamaan (42), (43), (44)) disebut sebagai penjabaran dalam gambar Schrödinger (*Schrödinger picture*). Dalam gambar Schrödinger, kebergantungan sistem pada waktu diletakkan dalam keadaan sistem $|\psi(t)\rangle$. Operator besaran fisika $\hat{B}$ tidak bergantung pada waktu. Perhatikan bahwa walaupun $\hat{B}$ tidak bergantung waktu, namun nilainya $\langle B\rangle_t$ dapat berubah terhadap waktu, karena keadaan sistem $|\psi(t)\rangle$ berubah terhadap waktu, sebagaimana ditentukan oleh persamaan Schrödinger.

Kini, kita masukkan keadaan (44) ke dalam nilai ekspektasi (42), kita peroleh:

$$\begin{aligned} \langle B\rangle_t &= \langle e^{-iHt/\hbar}\psi(0)|\hat{B}e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \\ &= \langle\psi(0)|e^{iHt/\hbar}\hat{B}e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle \psi(0)|\hat{B}(t)|\psi(0)\rangle \,, \tag{45}$$

dengan:

$$\hat{B}(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{B}e^{-iHt/\hbar} \,. \tag{46}$$

Perubahan $\hat{B}(t)$ terhadap waktu diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{B}(t) &= \left(\frac{d}{dt}e^{iHt/\hbar}\right)\hat{B}e^{-iHt/\hbar} + e^{iHt/\hbar}\hat{B}\frac{d}{dt}e^{-iHt/\hbar} \\
&= \frac{i}{\hbar}He^{iHt/\hbar}\hat{B}e^{-iHt/\hbar} - \frac{i}{\hbar}e^{iHt/\hbar}\hat{B}He^{-iHt/\hbar} \\
&= \frac{i}{\hbar}He^{iHt/\hbar}\hat{B}e^{-iHt/\hbar} - \frac{i}{\hbar}e^{iHt/\hbar}\hat{B}e^{-iHt/\hbar}H \\
&= \frac{i}{\hbar}H\hat{B}(t) - \frac{i}{\hbar}\hat{B}(t)H \\
&= \frac{i}{\hbar}\left[H, \hat{B}(t)\right] \,.
\end{aligned} \tag{47}$$

Penjabaran yang kedua ini (persamaan (45), (46), (47)) disebut sebagai penjabaran dalam gambar Heisenberg (*Heisenberg picture*). Dalam gambar Heisenberg, kebergantungan sistem pada waktu diletakkan dalam operator $\hat{B}(t)$. Keadaan sistem yang diambil adalah keadaan pada waktu mula-mula $|\psi(0)\rangle$. Perhatikan bahwa hasil pengukuran atau nilai ekspektasi besaran $B$ dalam gambar Schrödinger (persamaan (42)) dan dalam gambar Heisenberg (persamaan (45)) sama. Catat juga bahwa hamiltonian tetap konstan dalam gambar Schrödinger maupun gambar Heisenberg, yaitu $H$, karena energi total merupakan konstanta gerak.

Sebagai contoh penjabaran dalam gambar Heisenberg, kita ambil osilator harmonik. Kita lihat bagaimana operator posisi dan operator momentum sebagai fungsi waktu. Dalam gambar Heisenberg operator tangga berubah terhadap waktu, sehingga hamiltonian osilator harmonik menjadi:

$$H = \hbar\omega\left(\hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t) + \frac{1}{2}\right) \,, \tag{48}$$

dengan

$$\hat{A}(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{A}e^{-iHt/\hbar} \tag{49}$$

$$\hat{A}^{+}(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar} \,. \tag{50}$$

Komutator $\hat{A}(t)$ dan $\hat{A}^{+}(t)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A}(t), \hat{A}^{+}(t)\right] &= \hat{A}(t)\hat{A}^{+}(t) - \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t) \\
&= e^{iHt/\hbar}\hat{A}e^{-iHt/\hbar}e^{iHt/\hbar}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar} - e^{iHt/\hbar}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar}e^{iHt/\hbar}\hat{A}e^{-iHt/\hbar} \\
&= e^{iHt/\hbar}\hat{A}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar} - e^{iHt/\hbar}\hat{A}^{+}\hat{A}e^{-iHt/\hbar} \\
&= e^{iHt/\hbar}\hat{A}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar} - e^{iHt/\hbar}\left(\hat{A}\hat{A}^{+} - \left[\hat{A}, \hat{A}^{+}\right]\right)e^{-iHt/\hbar} \\
&= e^{iHt/\hbar}\hat{A}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar} - e^{iHt/\hbar}\hat{A}\hat{A}^{+}e^{-iHt/\hbar} + e^{iHt/\hbar}\left[\hat{A}, \hat{A}^{+}\right]e^{-iHt/\hbar}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{iHt/\hbar}\hat{1}e^{-iHt/\hbar} \\
&= \hat{1}\,. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Sesuai persamaan (47), perubahan $\hat{A}(t)$ dan $\hat{A}^{+}(t)$ terhadap waktu diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{A}(t) &= \frac{i}{\hbar}\left[H, \hat{A}(t)\right] \\
&= i\omega\left[\hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t) + \frac{1}{2}, \hat{A}(t)\right] \\
&= i\omega\left[\hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t), \hat{A}(t)\right] \\
&= i\omega\hat{A}^{+}(t)\left[\hat{A}(t), \hat{A}(t)\right] + i\omega\left[\hat{A}^{+}(t), \hat{A}(t)\right]\hat{A}(t) \\
&= -i\omega\left[\hat{A}(t), \hat{A}^{+}(t)\right]\hat{A}(t) \\
&= -i\omega\hat{A}(t) \qquad (52) \\
\frac{d}{dt}\hat{A}^{+}(t) &= \frac{i}{\hbar}\left[H, \hat{A}^{+}(t)\right] \\
&= i\omega\left[\hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t) + \frac{1}{2}, \hat{A}^{+}(t)\right] \\
&= i\omega\left[\hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t), \hat{A}^{+}(t)\right] \\
&= i\omega\hat{A}^{+}(t)\left[\hat{A}(t), \hat{A}^{+}(t)\right] + i\omega\left[\hat{A}^{+}(t), \hat{A}^{+}(t)\right]\hat{A}(t) \\
&= i\omega\hat{A}^{+}(t)\left[\hat{A}(t), \hat{A}^{+}(t)\right] \\
&= i\omega\hat{A}^{+}(t)\,, \qquad (53)
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh:

$$\hat{A}(t) = e^{-i\omega t}\hat{A}(0) \qquad (54)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}(t) + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}(t) = e^{-i\omega t}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}(0) + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}(0)\right) \qquad (55)$$

$$\hat{A}^{+}(t) = e^{i\omega t}\hat{A}^{+}(0) \qquad (56)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}(t) - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}(t) = e^{i\omega t}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}(0) - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}(0)\right)\,. \qquad (57)$$

Kita selesaikan persamaan (56) dan (57) untuk $\hat{x}(t)$ dan $\hat{p}(t)$, kita dapatkan:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0)\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\hat{p}(0)\sin\omega t \qquad (58)$$

$$\hat{p}(t) = \hat{p}(0)\cos\omega t - m\omega\hat{x}(0)\sin\omega t\,. \qquad (59)$$