Catatan Mekanika Kuantum 1

Notasi Dirac, Operator Konjugat Hermitian, Operator Proyeksi, Degenerasi dan Keadaan Eigen Simultan, Ketidakpastian Pengukuran, Perubahan Nilai Besaran terhadap Waktu, Limit Klasik

Acuan utama Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 6, Subbab 1, Bab 5, Subbab 3 – 5

Dua subbab pertama Bab 5 Gasiorowicz berisi rangkuman konsep mekanika kuantum yang telah dibahas dalam bab-bab sebelumnya. Di sini kita lanjutkan dengan subbab berikutnya, yaitu mulai dengan Subbab 3. Namun, sebelumnya kita loncat sedikit ke Bab 6 Subbab 1 untuk berkenalan dengan notasi Dirac.

A. Notasi Dirac

Sebelum ini kita telah banyak berurusan dengan fungsi gelombang. Kita juga telah mengenal dua ruang atau dua representasi, sehingga kita temui fungsi gelombang di ruang posisi dan fungsi gelombang di ruang momentum. Fungsi gelombang di ruang posisi dan fungsi gelombang di ruang momentum tersebut dapat saja merepresentasikan keadaan yang sama untuk sistem yang sama. Jadi, kita temui di sini ada yang disebut keadaan (*state*) dan ada yang disebut fungsi gelombang (*wave function*). Apa hubungan antar keduanya?

Fungsi gelombang suatu sistem adalah keadaan sistem itu yang ditampilkan dalam suatu representasi tertentu (disebut juga dalam suatu ruang tertentu). Contoh, sebuah partikel berada dalam keadaan bebas (*free state*) dengan momentum linier q, fungsi gelombangnya dalam ruang posisi adalah $e^{iqx/\hbar}$ dan fungsi gelombangnya dalam ruang momentum adalah $\delta(p-q)$. Tidak hanya untuk fungsi gelombang, representasi juga dipakai untuk operator. Sebuah operator, misalkan operator momentum linier $\hat{p}$, dapat ditampilkan dalam representasi (ruang) posisi x, dalam contoh ini $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$, dapat juga ditampilkan dalam representasi (ruang) momentum, dalam contoh ini $\hat{p} = p$.

Representasi (ruang) ada bermacam-macam, bukan hanya representasi posisi dan representasi momentum. Dalam mekanika kuantum orang juga dapat bekerja tidak dalam suatu representasi (ruang) tertentu, yaitu orang bekerja bukan dengan fungsi gelombang (*wave function*), melainkan dengan keadaan (*state*), dan juga dengan operator yang tidak ditampilkan dalam suatu representasi. Dalam hal ini, orang bekerja menggunakan notasi, yang disebut notasi Dirac.

- Keadaan kuantum ψ dalam notasi Dirac dinyatakan dengan $|\psi\rangle$, disebut *ket*. Dapat dipahami bahwa ada banyak sekali keadaan kuantum. Bayangkan saja, ada berapa banyak sistem kuantum dan bahwa tiap sistem kuantum dapat menempati keadaan-keadan kuantum yang bervariasi. Keadaan-keadaan kuantum merupakan vektor-vektor yang berada dalam suatu ruang vektor linier, yang disebut ruang Hilbert. Untuk tiap keadaan $|\psi\rangle$ ada pasangannya (konjugatnya), yaitu $\langle\psi|$, disebut *bra*, yang berada dalam pasangan (konjugat) ruang Hilbert (*dual Hilbert space*). Perkalian skalar sebuah *bra* $\langle\phi|$ dan sebuah *ket* $|\psi\rangle$ dinyatakan sebagai sebuah *bra-ket* $\langle\phi|\psi\rangle$. Sebaliknya, perkalian skalar *bra* $\langle\psi|$ dan *ket* $|\phi\rangle$ dinyatakan sebagai *bra-ket* $\langle\psi|\phi\rangle$. *Bra-ket* $\langle\psi|\phi\rangle$ dan *bra-ket* $\langle\phi|\psi\rangle$ merupakan pasangan konjugat kompleks:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* \,,\ \langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \,. \tag{1}$$

- Persamaan Schrödinger dituliskan dalam notasi Dirac sebagai:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)|\psi(t)\rangle \tag{2}$$

dan untuk keadaan tunak (*stationary*):

$$H|\psi\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \,. \tag{3}$$

- Dalam notasi Dirac keadaan bebas sebuah partikel dengan momentum linier q dituliskan sebagai $|q\rangle$ dan operator momentum linier dituliskan sebagai $\hat{p}$, sehingga persamaan nilai eigen untuk operator momentum dituliskan sebagai:

$$\hat{p}|q\rangle = q|q\rangle \,. \tag{4}$$

Persamaan (4) menyatakan bahwa $|q\rangle$ adalah keadaan eigen (*eigenstate*) operator momentum linier $\hat{p}$ dengan nilai eigen (*eigenvalue*) q.

- Ekspansi suatu keadaan $|\psi\rangle$ dalam $|u_n\rangle$ dituliskan sebagai:

$$|\psi\rangle = \sum_n A_n|u_n\rangle \,. \tag{5}$$

Di sini $|u_n\rangle$ merupakan keadaan eigen suatu operator besaran fisika, yang nilai eigennya diskrit, misalkan operator energi total H pada kasus partikel dalam kotak:

$$H|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle \,. \tag{6}$$

Keadaan $|u_n\rangle$ dalam hal ini berperan sebagai keadaan basis (*basis state*) (dalam pembahasan mengenai vektor, keadaan basis itu seperti vektor satuan $\hat{\mathbf{e}}_i$). Keadaan basis harus mempunyai dua sifat, yaitu ortogonal dan komplit, sehingga sembarang keadaan dapat diekspansi atau dinyatakan dalam keadaan basis tersebut. Ortogonalitas keadaan basis $|u_n\rangle$ dinyatakan dengan:

$$\langle u_m|u_n\rangle = \delta_{mn} \tag{7}$$

dan sifat komplitnya dinyatakan dengan sebuah persamaan yang disebut relasi kekomplitan (*completeness relation*):

$$\sum_n |u_n\rangle\langle u_n| = \hat{1}\,. \tag{8}$$

Perhatikan bahwa relasi kekomplitan merupakan operator. Dengan ortogonalitas (7) kita dapat mencari, misalkan, koefisien ekspansi A_n, yaitu dengan menghitung *bra-ket* $\langle u_n|\psi\rangle$ (dengan kata lain, menghitung perkalian skalar $\langle u_n|$ dan $|\psi\rangle$ atau memroyeksikan $|\psi\rangle$ pada $\langle u_n|$):

$$\begin{aligned}\langle u_n|\psi\rangle &= \langle u_n|\sum_m A_m|u_m\rangle \\ &= \sum_m A_m\langle u_n|u_m\rangle \\ &= \sum_m A_m\delta_{nm} \\ &= A_n\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Proyeksi $|u_n\rangle$ pada $\langle\psi|$ memberikan konjugat kompleks A_n, yaitu A_n^*:

$$\langle\psi|u_n\rangle = \langle u_n|\psi\rangle^* = A_n^*\,. \tag{10}$$

Dengan relasi kekomplitan (8) kita dapat, misalkan, mengekspansi $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \hat{1}|\psi\rangle \\ &= \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle \\ &= \sum_n |u_n\rangle A_n \\ &= \sum_n A_n|u_n\rangle\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Karena relasi kekomplitan sama dengan operator $\hat{1}$, maka dapat disisipkan di suatu tempat dalam suatu perhitungan. Contoh:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\sum_n |u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle \\ &= \sum_n\langle\psi|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle \\ &= \sum_n A_n^* A_n \\ &= \sum_n |A_n|^2\,. \end{aligned} \tag{12}$$

- Apabila keadaan basis yang dipakai $|u_\alpha\rangle$ merupakan keadaan eigen operator besaran fisika, yang nilai eigennya kontinyu, yaitu α kontinyu, maka ekspansi $|\psi\rangle$ menjadi:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha\, A(\alpha)|u_\alpha\rangle\,. \tag{13}$$

Ortogonalitas keadaan basis $|u_\alpha\rangle$ dinyatakan dengan:

$$\langle u_\beta|u_\alpha\rangle = \delta(\beta - \alpha) \tag{14}$$

dan relasi kekomplitannya diberikan sebagai berikut:

$$\int d\alpha\, |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha| = \hat{1}\,. \tag{15}$$

Koefisien ekspansi $A(\alpha)$ dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle u_\alpha|\psi\rangle &= \langle u_\alpha| \int d\beta\, A(\beta)|u_\beta\rangle \\ &= \int d\beta\, A(\beta)\langle u_\alpha|u_\beta\rangle \\ &= \int d\beta\, A(\beta)\delta(\alpha - \beta) \\ &= A(\alpha)\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Proyeksi $|u_\alpha\rangle$ pada $\langle\psi|$ memberikan konjugat kompleks A_α, yaitu $A^*(\alpha)$:

$$\langle\psi|u_\alpha\rangle = \langle u_\alpha|\psi\rangle^* = A^*(\alpha)\,. \tag{17}$$

Dengan relasi kekomplitan (15) kita dapat mengekspansi $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \hat{1}|\psi\rangle \\ &= \int d\alpha\, |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\psi\rangle \\ &= \int d\alpha\, |u_\alpha\rangle A(\alpha) \\ &= \int d\alpha\, A(\alpha)|u_\alpha\rangle\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Contoh lain penerapan relasi kekomplitan:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \int d\alpha\, |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\psi\rangle \\ &= \int d\alpha\, \langle\psi|u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\psi\rangle \\ &= \int d\alpha\, A(\alpha)^* A(\alpha) \\ &= \int d\alpha\, |A(\alpha)|^2\,.\end{aligned} \tag{19}$$

- Fungsi gelombang $\psi(x)$ diperoleh dengan memroyeksikan *ket* $|\psi\rangle$ pada *bra* posisi $\langle x|$:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle\,. \tag{20}$$

Konjugat kompleks $\psi(x)$, yaitu $\psi^*(x)$, diperoleh sebagai:

$$\psi^*(x) = \langle x|\psi\rangle^* = \langle\psi|x\rangle\,. \tag{21}$$

Ket $|x\rangle$ sebagai keadaan basis posisi memiliki ortogonalitas:

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x) \tag{22}$$

dan relasi kekomplitan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x| = \hat{1}\,. \tag{23}$$

Ekspansi (5) dalam ruang posisi diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle x|\psi\rangle &= \langle x|\sum_n A_n|u_n\rangle \\ \to \psi(x) &= \sum_n A_n\langle x|u_n\rangle \\ \to \psi(x) &= \sum_n A_n u_n(x)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Demikian pula ekspansi (13):

$$\begin{aligned}\langle x|\psi\rangle &= \langle x|\int d\alpha\, A(\alpha)|u_\alpha\rangle \\ \to \psi(x) &= \int d\alpha\, A(\alpha)\langle x|u_\alpha\rangle \\ \to \psi(x) &= \int d\alpha\, A(\alpha)u_\alpha(x)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

- Fungsi gelombang $\phi(p)$ diperoleh dengan memroyeksikan *ket* $|\phi\rangle$ pada *bra* momentum linier $\langle p|$:

$$\phi(p) = \langle p|\phi\rangle\,. \tag{26}$$

Konjugat kompleks $\phi(p)$, yaitu $\phi^*(p)$, diperoleh sebagai:

$$\phi^*(p) = \langle p|\phi\rangle^* = \langle \phi|p\rangle\,. \tag{27}$$

Ket $|p\rangle$ sebagai keadaan basis momentum memiliki ortogonalitas:

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \tag{28}$$

dan relasi kekomplitan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\,|p\rangle\langle p| = \hat{1}\,. \tag{29}$$

Ekspansi (5) dalam ruang momentum diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle p|\psi\rangle &= \langle p|\sum_n A_n|u_n\rangle \\ \to \psi(p) &= \sum_n A_n\langle p|u_n\rangle \\ \to \psi(p) &= \sum_n A_n u_n(p)\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Demikian pula ekspansi (13):

$$\begin{aligned}\langle p|\psi\rangle &= \langle p|\int d\alpha\, A(\alpha)|u_\alpha\rangle \\ \rightarrow \psi(p) &= \int d\alpha\, A(\alpha)\langle p|u_\alpha\rangle \\ \rightarrow \psi(p) &= \int d\alpha\, A(\alpha)u_\alpha(p)\,. \end{aligned} \tag{31}$$

- Fungsi gelombang bebas dengan momentum linier q dalam ruang posisi diperoleh sebagai gelombang bidang (*plane wave*):

$$\psi_q(x) = \langle x|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iqx/\hbar}\,. \tag{32}$$

Konjugat kompleksnya adalah:

$$\psi_q^*(x) = \langle x|q\rangle^* = \langle q|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-iqx/\hbar}\,. \tag{33}$$

Fungsi gelombang dalam ruang momentum untuk keadaan bebas yang sama adalah:

$$\psi_q(p) = \langle p|q\rangle = \delta(p-q)\,. \tag{34}$$

- *Bra-ket* $\langle\phi|\psi\rangle$ dalam ruang posisi dikerjakan sebagai:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= \langle\phi|\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi^*(x)\psi(x)\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Ini menjelaskan bahwa $\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle^* &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi^*(x)\psi(x)\right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi(x)\psi^*(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\phi(x) \\ &= \langle\psi|\phi\rangle\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Dalam ruang momentum, *bra-ket* $\langle\phi|\psi\rangle$ dikerjakan sebagai:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|\hat{1}|\psi\rangle \\ &= \langle\phi|\int_{-\infty}^{\infty} dp\,|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\langle\phi|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi^*(p)\psi(p)\,. \end{aligned} \tag{37}$$

- Contoh berpindah ruang, dari ruang posisi ke ruang momentum, dari $\psi(x)$ ke $\psi(p)$:

$$\begin{aligned}
\psi(p) &= \langle p|\psi\rangle \\
&= \langle p|\hat{1}|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle x|p\rangle^*\langle x|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}\psi(x)\,. \qquad (38)
\end{aligned}$$

Sebaliknya, pindah dari ruang momentum ke ruang posisi:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \langle x|\psi\rangle \\
&= \langle x|\hat{1}|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipx/\hbar}\psi(p)\,. \qquad (39)
\end{aligned}$$

- Dalam notasi Dirac, nilai ekspektasi dituliskan secara lebih ringkas:

$$\langle B\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\,. \qquad (40)$$

Apabila $|\psi\rangle$ ternormalisasi, nilai ekspektasi itu menjadi:

$$\langle B\rangle = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle\,. \qquad (41)$$

Jika ingin mendapatkan nilai ekspektasi (41) dalam ruang posisi x, kita gunakan keadaan basis posisi $|x\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle B\rangle &= \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\hat{1}\hat{B}\hat{1}|\psi\rangle \\
&= \int dx' \int dx\, \langle\psi|x'\rangle\langle x'|\hat{B}|x\rangle\langle x|\psi\rangle \\
&= \int dx' \int dx\, \psi^*(x')\hat{B}(x',x)\psi(x)\,, \qquad (42)
\end{aligned}$$

dengan $\hat{B}(x',x)$ adalah elemen matriks operator $\hat{B}$ dalam ruang posisi (ingat kembali bahwa mekanika kuantum merupakan mekanika matriks, dalam hal $\hat{B}(x',x) = \langle x'|\hat{B}|x\rangle$, x' menyatakan baris dan x menyatakan kolom). Jika matriks operator $\hat{B}$ dalam ruang posisi bersifat diagonal (elemen nondiagonalnya nol), berarti $\hat{B}(x',x) = \langle x'|\hat{B}|x\rangle = \delta(x'-x)\hat{B}(x)$, sehingga:

$$\langle B\rangle = \int dx' \int dx\, \psi^*(x')\delta(x'-x)\hat{B}(x)\psi(x)$$

$$= \int dx\, \psi^*(x)\hat{B}(x)\psi(x)\,. \tag{43}$$

Contoh, matriks operator momentum linier dalam ruang posisi diperoleh bersifat diagonal, dengan:

$$\hat{p}(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\,. \tag{44}$$

Dengan demikian, nilai ekspektasi momentum linier dalam ruang posisi dihitung sebagai:

$$\langle p \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)\,. \tag{45}$$

- Kita telah melihat ekspansi suatu keadaan dalam keadaan basis, contoh, persamaan (11) dan (18). Operator juga dapat diekspansi dalam keadaan basis. Satu contoh dapat kita lihat pada persamaan (42), yaitu ekspansi operator $\hat{B}$ dalam keadaan basis posisi $|x\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \hat{1}\hat{B}\hat{1} \\
&= \int dx'\, |x'\rangle\langle x'|\hat{B} \int dx\, |x\rangle\langle x| \\
&= \int dx' \int dx\, |x'\rangle\langle x'|\hat{B}|x\rangle\langle x| \\
&= \int dx' \int dx\, |x'\rangle\hat{B}(x',x)\langle x|\,,
\end{aligned} \tag{46}$$

Dengan $\hat{B}(x',x) = \langle x'|\hat{B}|x\rangle$. Jika matriks operator $\hat{B}$ dalam ruang posisi x bersifat diagonal, maka ekspansinya menjadi:

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \int dx' \int dx\, |x'\rangle\delta(x'-x)\hat{B}(x)\langle x| \\
&= \int dx\, |x\rangle\hat{B}(x)\langle x|\,.
\end{aligned} \tag{47}$$

Apabila digunakan keadaan basis $|n\rangle$, dengan n diskrit, ekspansi $\hat{B}$ adalah:

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \hat{1}\hat{B}\hat{1} \\
&= \sum_m |m\rangle\langle m|\hat{B}\sum_n |n\rangle\langle n| \\
&= \sum_m\sum_n |m\rangle\langle m|\hat{B}|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_m\sum_n |m\rangle\hat{B}_{mn}\langle n|\,.
\end{aligned} \tag{48}$$

Dengan $\hat{B}_{mn} = \langle m|\hat{B}|n\rangle$. Jika matriks operator $\hat{B}$ dalam ruang n bersifat diagonal, maka ekspansinya menjadi:

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \sum_m\sum_n |m\rangle\delta_{mn}\hat{B}_n\langle n| \\
&= \sum_n |n\rangle\hat{B}_n\langle n|\,.
\end{aligned} \tag{49}$$

B. Operator konjugat hermitian

Ambillah sebuah operator $\hat{A}$ dan anggaplah:

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\xi\rangle \,. \tag{50}$$

Dengan demikian:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* &= \langle\phi|\xi\rangle^* \\ &= \langle\xi|\phi\rangle \\ &= \langle\hat{A}\psi|\phi\rangle \,.\end{aligned} \tag{51}$$

Operator konjugat hermitian dari operator $\hat{A}$, yaitu $\hat{A}^+$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle\psi|\hat{A}^+|\phi\rangle = \langle\hat{A}\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* \,. \tag{52}$$

- Misalkan diberikan sebuah operator dalam ruang posisi sebagai berikut:

$$\hat{B}(x) = \frac{d}{dx} \,. \tag{53}$$

Sesuai definisi di persamaan (52), operator konjugat hermitian $\hat{B}^+(x)$ di ruang posisi diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{B}^+|\phi\rangle &= \langle\hat{B}\psi|\phi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left(\frac{d}{dx}\psi(x)\right)^*\phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left(\frac{d}{dx}\psi^*(x)\right)\phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left[\frac{d}{dx}\left(\psi^*(x)\phi(x)\right) - \psi^*(x)\frac{d}{dx}\phi(x)\right] \\ &= \;\psi^*(x)\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\frac{d}{dx}\phi(x) \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\frac{d}{dx}\phi(x)\,,\;\text{(sesuai sifat fungsi gelombang di ujung jagad)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\left(-\frac{d}{dx}\right)\phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\hat{B}^+(x)\phi(x) \\ \rightarrow \hat{B}^+(x) &= -\frac{d}{dx}\end{aligned} \tag{54}$$

atau:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{B}^+|\phi\rangle &= \langle\phi|\hat{B}|\psi\rangle^* \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x)\right)^*\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x) \frac{d}{dx} \psi^*(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left[\frac{d}{dx}\left(\psi^*(x)\phi(x)\right) - \psi^*(x)\frac{d}{dx}\phi(x)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\left(-\frac{d}{dx}\right)\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\hat{B}^+(x)\phi(x) \\
\rightarrow \hat{B}^+(x) &= -\frac{d}{dx}\,.
\end{aligned} \tag{55}
$$

- Apabila ada 2 atau lebih operator, dikerjakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi|\hat{A}\hat{B}\hat{C}...|\psi\rangle^* &= \langle\hat{A}\hat{B}\hat{C}...\psi|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|(\hat{A}\hat{B}\hat{C}...)^+|\phi\rangle
\end{aligned} \tag{56}
$$

  atau

$$
\begin{aligned}
\langle\phi|\hat{A}\hat{B}\hat{C}...|\psi\rangle^* &= \langle\hat{A}\hat{B}\hat{C}...\psi|\phi\rangle \\
&= \langle\hat{B}\hat{C}...\psi|\hat{A}^+|\phi\rangle \\
&= \langle\hat{C}...\psi|\hat{B}^+\hat{A}^+|\phi\rangle \\
&= \langle...\psi|\hat{C}^+\hat{B}^+\hat{A}^+|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|(...)^+\hat{C}^+\hat{B}^+\hat{A}^+|\phi\rangle\,.
\end{aligned} \tag{57}
$$

  Dengan demikian, diperoleh relasi berikut:

$$
(\hat{A}\hat{B}\hat{C}...)^+ = (...)^+\hat{C}^+\hat{B}^+\hat{A}^+\,. \tag{58}
$$

- Jika $|\psi\rangle$ adalah keadaan eigen $\hat{A}$ dengan nilai eigen a:

$$
\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle\,. \tag{59}
$$

  Perhatikan bahwa:

$$
\langle\hat{A}\psi| = \langle a\psi| = a^*\langle\psi|\,. \tag{60}
$$

- Jika $\hat{A}$ operator sebuah besaran fisika, maka $\hat{A}$ operator hermitian, yaitu nilai eigennya dan juga nilai ekspektasinya riil:

$$
\begin{aligned}
\langle A\rangle^* &= \langle A\rangle \\
\rightarrow \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^* &= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \\
\rightarrow \langle\psi|\hat{A}^+|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\,.
\end{aligned} \tag{61}
$$

  Dengan demikian, untuk operator hermitian, operator konjugat hermitiannya sama dengan operator itu sendiri, $\hat{A}^+ = \hat{A}$, $\langle\hat{A}\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle$. Contoh, kita ambil operator momentum linier di ruang posisi:

$$
\hat{p}(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \tag{62}
$$

dan cari konjugat hermitiannya dengan cara seperti dalam persamaan (54):

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{p}^{+}|\phi\rangle &= \langle\hat{p}\psi|\phi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)\right)^{*}\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi^{*}(x)\right)\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left[-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\left(\psi^{*}(x)\phi(x)\right) + \psi^{*}(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\phi(x)\right] \\
&= -\frac{\hbar}{i}\,\psi^{*}(x)\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^{*}(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^{*}(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^{*}(x)\hat{p}^{+}(x)\phi(x) \\
\to \hat{p}^{+}(x) &= \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \\
\to \hat{p}^{+} &= \hat{p}\,.
\end{aligned} \tag{63}$$

- Persamaan Schrödinger untuk bra $\langle\psi(t)|$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\left\langle i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t)\right| &= \langle H\psi(t)| = \left\langle\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}\right)\psi(t)\right| \\
\to -i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| &= \langle\psi(t)|H = \langle\psi(t)|\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}\right)
\end{aligned} \tag{64}$$

dan untuk keadaan tunak:

$$\begin{aligned}
\langle H\psi| &= \left\langle\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}\right)\psi\right| = E\langle\psi| \\
\to \langle\psi|H &= \langle\psi|\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}\right) = E\langle\psi|\,.
\end{aligned} \tag{65}$$

- Jika $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ kedua-duanya hermitian, maka, sesuai persamaan (58):

$$\begin{aligned}
(\hat{A}\hat{B})^{+} &= \hat{B}^{+}\hat{A}^{+} \\
&= \hat{B}\hat{A} \\
&= \hat{A}\hat{B} - [\hat{A},\hat{B}]\,.
\end{aligned} \tag{66}$$

Jika $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ komut (*commute*), $[\hat{A},\hat{B}] = 0$ dan $(\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{A}\hat{B}$, yang berarti $\hat{A}\hat{B}$ juga hermitian. Namun, apabila $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ tidak komut, $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$ dan $(\hat{A}\hat{B})^{+} \neq \hat{A}\hat{B}$, yang berarti $\hat{A}\hat{B}$ tidak hermitian.

- Misalkan $\hat{O}$ operator hermitian, $|a\rangle$ dan $|b\rangle$ adalah keadaan eigen $\hat{O}$, dengan nilai eigen masing-masing α dan β (α dan β tentu riil):

$$\hat{O}|a\rangle = \alpha|a\rangle \qquad \text{dan} \qquad \hat{O}|b\rangle = \beta|b\rangle\,. \tag{67}$$

Maka:

$$\langle b|\hat{O}|a\rangle = \langle b|\alpha|a\rangle = \alpha\langle b|a\rangle \tag{68}$$

dan juga:

$$\langle b|\hat{O}|a\rangle = \langle \hat{O}b|a\rangle = \langle \beta b|a\rangle = \beta\langle b|a\rangle\,. \tag{69}$$

Dengan demikian,

$$\langle b|\hat{O}|a\rangle - \langle b|\hat{O}|a\rangle = (\alpha - \beta)\langle b|a\rangle = 0\,. \tag{70}$$

Dari persamaan (70) dapat kita simpulkan, jika $|a\rangle = |b\rangle$, maka $\langle b|a\rangle \neq 0$ dan $\alpha = \beta$; jika $|a\rangle \neq |b\rangle$, maka $\alpha \neq \beta$ dan $\langle b|a\rangle = 0$. Ini menunjukkan bahwa keadaan-keadaan eigen operator hermitian saling tegak lurus.

C. Operator proyeksi

Misalkan kita ambil keadaan basis $|n\rangle$, dengan ortogonalitas dan relasi kekomplitan berturut-turut sebagai berikut:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad \text{dan} \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}\,. \tag{71}$$

Sebuah sembarang keadaan $|\psi\rangle$ diekspansi dalam keadaan basis $|n\rangle$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \hat{1}|\psi\rangle \\ &= \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= \sum_n A_n|n\rangle\,, \end{aligned} \tag{72}$$

dengan A_n koefisien ekspansi:

$$A_n = \langle n|\psi\rangle\,. \tag{73}$$

Misalkan ada sebuah operator $\hat{P}_n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|\,. \tag{74}$$

Apabila $\hat{P}_n$ bekerja pada $|\psi\rangle$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{P}_n|\psi\rangle &= |n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= |n\rangle\langle n \sum_m A_m|m\rangle \\ &= \sum_m |n\rangle\langle n|m\rangle A_m \\ &= \sum_m |n\rangle\delta_{nm}A_m \\ &= A_n|n\rangle\,, \end{aligned} \tag{75}$$

yaitu $\hat{P}_n$ bekerja pada $|\psi\rangle$ menghasilkan $|n\rangle$, dengan amplitudo A_n. Operator $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ disebut sebagai operator proyeksi. Apabila bekerja pada $|\psi\rangle$, operator $\hat{P}_n$ memroyeksikan keadaan $|\psi\rangle$ pada keadaan $|n\rangle$, sehingga diperoleh keadaan $|n\rangle$ dengan amplitudo $A_n = \langle n|\psi\rangle$. Dengan kata lain, operator proyeksi $\hat{P}_n$ mengubah keadaan $|\psi\rangle$ menjadi salah satu keadaan basis yang membentuk $|\psi\rangle$, yaitu $|n\rangle$, dengan amplitudo A_n.

- Dari relasi kekomplitan (71), diperoleh sifat operator proyeksi $\hat{P}_n$ berikut:

$$\sum_n \hat{P}_n = \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}\,. \tag{76}$$

- Apabila suatu keadaan $|\psi\rangle$ telah diproyeksikan oleh operator $\hat{P}_n$ ke keadaan $|n\rangle$, proyeksi-proyeksi selanjutnya ke keadaan lain tidak memberikan hasil:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_n|\psi\rangle &= A_n|n\rangle && (77)\\
\hat{P}_m\hat{P}_n|\psi\rangle &= A_n\hat{P}_m|n\rangle \\
&= A_n|m\rangle\langle m|n\rangle \\
&= A_n|m\rangle\delta_{mn} \\
&= A_n|n\rangle\delta_{mn}\,, \text{ (dibenarkan, karena ada delta Kronecker)} \\
&= \delta_{mn}\hat{P}_n|\psi\rangle && (78)\\
\rightarrow \hat{P}_m\hat{P}_n &= \delta_{mn}\hat{P}_n && (79)\\
\hat{P}_k\hat{P}_m\hat{P}_n|\psi\rangle &= \delta_{mn}\hat{P}_k\hat{P}_n|\psi\rangle \\
&= \delta_{kn}\delta_{mn}\hat{P}_n|\psi\rangle && (80)\\
\rightarrow \hat{P}_k\hat{P}_m\hat{P}_n &= \delta_{kn}\delta_{mn}\hat{P}_n\,. && (81)
\end{aligned}$$

- Sesuai sifat operator proyeksi di persamaan (79), proyeksi yang sama berkali-kali sama saja dengan proyeksi hanya sekali:

$$\begin{aligned}
(\hat{P}_n)^2 &= \hat{P}_n\hat{P}_n = \hat{P}_n \\
(\hat{P}_n)^3 &= \hat{P}_n(\hat{P}_n)^2 = \hat{P}_n\hat{P}_n = \hat{P}_n \\
\rightarrow (\hat{P}_n)^m &= \hat{P}_n\,. && (82)
\end{aligned}$$

  Hal ini mengingatkan kita pada pengukuran (ingat kembali catatan di akhir pembahasan mengenai postulat ekspansi). Pengukuran membuat keadaan sistem terproyeksikan ke salah satu keadaan eigen yang mungkin. Pengukuran-pengukuran berikutnya memberikan hasil yang sama dengan pengukuran yang pertama.

- Kita lihat nilai ekspektasi suatu besaran fisika, yang operatornya adalah $\hat{O}$, dan anggap bahwa $|n\rangle$ adalah keadaan eigen $\hat{O}$ dengan nilai eigen O_n:

$$\hat{O}\; n\rangle = O_n|n\rangle \tag{83}$$

$$
\begin{aligned}
\langle O \rangle &= \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{O} \hat{1} | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{O} \sum_n \hat{P}_n | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{O} \sum_n A_n | n \rangle \\
&= \langle \psi | \sum_n A_n \hat{O} | n \rangle \\
&= \langle \psi | \sum_n A_n O_n | n \rangle \\
&= \langle \psi | \sum_n O_n A_n | n \rangle \\
&= \langle \psi | \sum_n O_n \hat{P}_n | \psi \rangle \,. \qquad (84)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, operator $\hat{O}$ dapat dinyatakan sebagai:

$$
\hat{O} = \sum_n O_n \hat{P}_n \,. \qquad (85)
$$

D. Degenerasi dan keadaan eigen simultan

Ambillah keadaan $|u_n\rangle$, yang merupakan keadaan eigen operator $\hat{A}$, dengan nilai eigen a_n, dan juga merupakan keadaan eigen operator $\hat{B}$, dengan nilai eigen b_n:

$$
\hat{A} |u_n\rangle = a_n |u_n\rangle \qquad (86)
$$

$$
\hat{B} |u_n\rangle = b_n |u_n\rangle \,. \qquad (87)
$$

Keadaan $|u_n\rangle$ disebut merupakan keadaan eigen simultan operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$. Anggaplah $|u_n\rangle$ bersifat ortogonal dan komplit, sehingga $|u_n\rangle$ dapat menjadi keadaan basis untuk menyatakan sembarang keadaan $|\psi\rangle$:

$$
|\psi\rangle = \sum_n C_n |u_n\rangle \,. \qquad (88)
$$

Kini, kita hitung komutator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{A}, \hat{B}\right] |\psi\rangle &= \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) \sum_n C_n |u_n\rangle \\
&= \sum_n C_n \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) |u_n\rangle \\
&= \sum_n C_n \left(\hat{A}\hat{B}|u_n\rangle - \hat{B}\hat{A}|u_n\rangle\right) \\
&= \sum_n C_n \left(b_n \hat{A}|u_n\rangle - a_n \hat{B}|u_n\rangle\right) \\
&= \sum_n C_n \left(a_n b_n |u_n\rangle - a_n b_n |u_n\rangle\right) \\
&= 0 \,. \qquad (89)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, disimpulkan bahwa apabila operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ memiliki keadaan eigen simultan, yang bersifat ortogonal dan komplit, maka operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ komut, komutatornya nol.

Kini, kita balik, kita mulai dengan diketahui bahwa operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ komut, komutatornya nol, dan bahwa $|u_n\rangle$ keadaan eigen operator $\hat{A}$, dengan nilai eigen a_n. Kita akan lihat, apakah $|u_n\rangle$ merupakan keadaan eigen simultan operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$.

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A},\hat{B}\right]|\psi\rangle &= \left[\hat{A},\hat{B}\right]\sum_n C_n|u_n\rangle \\
&= \sum_n C_n\left[\hat{A},\hat{B}\right]|u_n\rangle \\
&= 0 \\
\to \left[\hat{A},\hat{B}\right]|u_n\rangle &= \hat{A}\hat{B}|u_n\rangle - \hat{B}\hat{A}|u_n\rangle \\
&= 0 \\
\to \hat{A}\hat{B}|u_n\rangle &= \hat{B}\hat{A}|u_n\rangle \\
&= a_n\hat{B}|u_n\rangle\,.
\end{aligned} \tag{90}$$

Persamaan (90) menyatakan bahwa $\hat{B}|u_n\rangle$ merupakan keadaan eigen $\hat{A}$, dengan nilai eigen a_n atau, dalam kalimat yang lebih panjang, operator $\hat{B}$ bekerja pada keadaan $|u_n\rangle$ menghasilkan suatu keadaan, yang merupakan keadaan eigen $\hat{A}$, dengan nilai eigen a_n:

$$\hat{B}|u_n\rangle = |\phi_n\rangle \to \hat{A}|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle\,. \tag{91}$$

Pertanyaan, $|\phi_n\rangle = \hat{B}|u_n\rangle$ sama dengan apa? Ada dua kasus berbeda:

1. Jika tidak ada degenerasi, yaitu keadaan eigen operator $\hat{A}$ dengan nilai eigen a_n hanyalah $|u_n\rangle$, maka hanya mungkin bahwa $|\phi_n\rangle$ adalah sebanding dengan $|u_n\rangle$, dengan kata lain $|\phi_n\rangle$ sama dengan $|u_n\rangle$ dikalikan dengan suatu konstanta / nilai:

   $$|\phi_n\rangle \propto |u_n\rangle = \textit{konstanta}\ |u_n\rangle\,. \tag{92}$$

   Dengan demikian, diperoleh:

   $$\hat{B}|u_n\rangle = \textit{konstanta}\ |u_n\rangle\,, \tag{93}$$

   yang merupakan persamaan nilai eigen, sehingga $|u_n\rangle$ juga keadaan eigen $\hat{B}$ atau $|u_n\rangle$ keadaan eigen simultan $\hat{A}$ dan $\hat{B}$. Kita cek:

   $$\begin{aligned}
   \hat{A}\hat{B}|u_n\rangle &= \textit{konstanta}\ \hat{A}|u_n\rangle \\
   &= a_n\ \textit{konstanta}\ |u_n\rangle \\
   &= a_n\hat{B}|u_n\rangle\,.
   \end{aligned} \tag{94}$$

2. Jika ada degenerasi, berarti keadaan eigen operator $\hat{A}$ dengan nilai eigen a_n bukan hanya $|u_n\rangle$. Anggaplah ada dua keadaan eigen dengan nilai eigen a_n (a_n *is two-fold degenerate*), yaitu $|u_n^{(1)}\rangle$ dan $|u_n^{(2)}\rangle$:

$$\hat{A}|u_n^{(1)}\rangle = a_n|u_n^{(1)}\rangle \quad \text{dan} \quad \hat{A}|u_n^{(2)}\rangle = a_n|u_n^{(2)}\rangle\,, \tag{95}$$

maka diperoleh:

$$\hat{A}\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle = a_n\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle \tag{96}$$
$$\hat{A}\hat{B}|u_n^{(2)}\rangle = a_n\hat{B}|u_n^{(2)}\rangle\,. \tag{97}$$

Dalam hal ini, tidak dapat dikatakan bahwa pasti $|u_n^{(1)}\rangle$ dan $|u_n^{(2)}\rangle$ juga keadaan eigen $\hat{B}$:

$$\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle \neq konstanta_1|u_n^{(1)}\rangle \quad \text{dan} \quad \hat{B}|u_n^{(2)}\rangle \neq konstanta_2|u_n^{(2)}\rangle\,, \tag{98}$$

melainkan secara umum berlaku:

$$\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle = b_{11}|u_n^{(1)}\rangle + b_{12}|u_n^{(2)}\rangle \tag{99}$$
$$\hat{B}|u_n^{(2)}\rangle = b_{21}|u_n^{(1)}\rangle + b_{22}|u_n^{(2)}\rangle\,, \tag{100}$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\hat{B}\begin{pmatrix} |u_n^{(1)}\rangle \\ |u_n^{(2)}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |u_n^{(1)}\rangle \\ |u_n^{(2)}\rangle \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Kita cek:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle &= \hat{A}\left(b_{11}|u_n^{(1)}\rangle + b_{12}|u_n^{(2)}\rangle\right) \\ &= b_{11}\hat{A}|u_n^{(1)}\rangle + b_{12}\hat{A}|u_n^{(2)}\rangle \\ &= a_n\left(b_{11}|u_n^{(1)}\rangle + b_{12}|u_n^{(2)}\rangle\right) \\ &= a_n\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B}|u_n^{(2)}\rangle &= \hat{A}\left(b_{21}|u_n^{(1)}\rangle + b_{22}|u_n^{(2)}\rangle\right) \\ &= b_{21}\hat{A}|u_n^{(1)}\rangle + b_{22}\hat{A}|u_n^{(2)}\rangle \\ &= a_n\left(b_{21}|u_n^{(1)}\rangle + b_{22}|u_n^{(2)}\rangle\right) \\ &= a_n\hat{B}|u_n^{(2)}\rangle\,. \end{aligned} \tag{103}$$

Pada kasus degenerasi kita bertemu beberapa keadaan yang tak terbedakan, karena berkenaan dengan suatu operator nilai eigennya sama. Pada contoh di atas, $|u_n^{(1)}\rangle$ dan $|u_n^{(2)}\rangle$ tak terbedakan, karena berkenaan dengan $\hat{A}$ nilai eigennya sama, yaitu a_n. Kemudian, kita ambil operator lain, $\hat{B}$, dengan harapan dapat membedakan $|u_n^{(1)}\rangle$ dari $|u_n^{(2)}\rangle$. Namun, harapan itu tidak terpenuhi, karena $|u_n^{(1)}\rangle$ dan $|u_n^{(2)}\rangle$ bukan keadaan eigen simultan $\hat{A}$ dan $\hat{B}$, sehingga tidak didapatkan nilai eigen untuk $|u_n^{(1)}\rangle$ dan $|u_n^{(2)}\rangle$ berkenaan dengan operator $\hat{B}$. Andaikan kita punya keadaan eigen simultan $\hat{A}$ dan $\hat{B}$, misalkan $|v_n^{(1)}\rangle$ dan $|v_n^{(2)}\rangle$, maka degenerasi yang berkenaan dengan operator $\hat{A}$:

$$\hat{A}|v_n^{(1)}\rangle = a_n|v_n^{(1)}\rangle \quad \text{dan} \quad \hat{A}|v_n^{(2)}\rangle = a_n|v_n^{(2)}\rangle \tag{104}$$

dapat dipecahkan dengan operator $\hat{B}$:

$$\hat{B}|v_n^{(1)}\rangle = b_{n,1}|v_n^{(1)}\rangle \quad \text{dan} \quad \hat{B}|v_n^{(2)}\rangle = b_{n,2}|v_n^{(2)}\rangle\,. \tag{105}$$

Keadaan eigen $|v_n^{(1)}\rangle$ dan $|v_n^{(2)}\rangle$ dapat dicari sebagai kombinasi linier $|u_n^{(1)}\rangle$ dan $|u_n^{(2)}\rangle$ dengan menyelesaikan persamaan nilai eigen seperti digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{B}\left(|u_n^{(1)}\rangle + \lambda|u_n^{(2)}\rangle\right) &= b_n\left(|u_n^{(1)}\rangle + \lambda|u_n^{(2)}\rangle\right) \\
\hat{B}|u_n^{(1)}\rangle + \lambda\hat{B}|u_n^{(2)}\rangle &= b_n\left(|u_n^{(1)}\rangle + \lambda|u_n^{(2)}\rangle\right) \\
b_{11}|u_n^{(1)}\rangle + b_{12}|u_n^{(2)}\rangle + \lambda\left(b_{21}|u_n^{(1)}\rangle + b_{22}|u_n^{(2)}\rangle\right) &= b_n\left(|u_n^{(1)}\rangle + \lambda|u_n^{(2)}\rangle\right) \\
\left(b_{11} + \lambda b_{21}\right)|u_n^{(1)}\rangle + \left(b_{12} + \lambda b_{22}\right)|u_n^{(2)}\rangle &= b_n\left(|u_n^{(1)}\rangle + \lambda|u_n^{(2)}\rangle\right) && (106) \\
\rightarrow b_{11} + \lambda b_{21} &= b_n && (107) \\
\rightarrow b_{12} + \lambda b_{22} &= \lambda b_n \\
&= \lambda\left(b_{11} + \lambda b_{21}\right) \\
&= \lambda b_{11} + \lambda^2 b_{21} && (108) \\
\rightarrow \lambda^2 b_{21} + \left(b_{11} - b_{22}\right)\lambda - b_{12} &= 0\,. && (109)
\end{aligned}$$

Persamaan kuadrat (109) memberikan dua nilai λ, yaitu λ_1 dan λ_2, sehingga diperoleh:

$$|v_n^{(1)}\rangle = |u_n^{(1)}\rangle + \lambda_1|u_n^{(2)}\rangle \qquad \text{dan} \qquad |v_n^{(2)}\rangle = |u_n^{(1)}\rangle + \lambda_2|u_n^{(2)}\rangle\,, \tag{110}$$

$$b_{n,1} = b_{11} + \lambda_1 b_{21} \qquad \text{dan} \qquad b_{n,2} = b_{11} + \lambda_2 b_{21}\,. \tag{111}$$

Operator $\hat{A}$ merepresentasikan besaran fisika, sebut saja besaran A. Jadi, bayangkan dalam kasus degenerasi ini kita mengukur besaran A pada dua sistem identik dengan keadaan berbeda, namun kita dapatkan hasil pengukuran tersebut sama, sehingga keadaan dua sistem tersebut tidak dapat dibedakan. Kemudian, kita ukuran besaran fisika yang lain, besaran B, sehingga keadaan dua sistem identik tersebut dapat dibedakan. Andaikan pengukuran besaran B, masih belum bisa memecahkan degenerasi, kita ukur besaran yang lain, besaran C, demikian seterusnya, sehingga keadaan-keadaan itu terbedakan, degenerasi dipecahkan. Pada pekerjaan teoretis, dicari juga keadaan eigen simultan operator-operator $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, ... Kumpulan operator $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, ... membentuk satu himpunan besaran atau operator komut:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \left[\hat{A},\hat{C}\right] = ... = \left[\hat{B},\hat{C}\right] = ... = 0\,. \tag{112}$$

Karena $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, ... komut, maka besaran A, B, C, ... dapat diukur secara bersamaan dengan hasil semua nilai besaran tersebut pasti, yaitu untuk besaran-besaran tersebut tidak berlaku ketidakpastian Heisenberg (lihat setelah ini). Pengukuran besaran-besaran tersebut memberikan nilai eigen a, b, c, dan seterusnya. Nilai-nilai besaran tersebut merupakan kumpulan informasi terbanyak mengenai sistem yang diamati, yang dapat diperoleh secara bersamaan dengan hasil pasti. Sebagai perbandingan, sekedar contoh, kita tahu bahwa operator momentum linier $\hat{p}$ dan posisi $\hat{x}$ tidak komut, maka momentum linier dan posisi tidak dapat diukur secara bersamaan dengan hasil kedua-duanya pasti; untuk momentum linier dan posisi berlaku ketidakpastan Heisenberg.

E. Ketidakpastian pengukuran

Bayangkan pengukuran suatu besaran dilakukan beberapa kali, kemudian dihitung nilai rata-rata hasil pengukuran sebagai nilai besaran yang diinginkan, misalkan $\langle A\rangle$. Deviasi hasil tiap pengukuran merupakan selisih nilai pengukuran tersebut dari nilai rata-rata, sebagai operator dituliskan $\hat{A} - \langle A\rangle$. Ketidakpastian pengukuran merupakan rata-rata semua deviasi hasil tiap pengukuran. Mengingat deviasi hasil tiap pengukuran dapat bernilai positif, maupun negatif, rata-ratanya dapat bernilai nol:

$$\begin{aligned}\langle A - \langle A\rangle\rangle &= \langle A\rangle - \langle\langle A\rangle\rangle \\ &= \langle A\rangle - \langle A\rangle \\ &= 0\,.\end{aligned} \tag{113}$$

Karena itu, biasanya orang menghitung kuadrat deviasi $(\hat{A} - \langle A\rangle)^2$ dan kuadrat ketidakpastian pengukuran $(\Delta A)^2$ sebagai rata-rata semua kuadrat deviasi hasil tiap pengukuran:

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle \\ &= \langle (A - \langle A\rangle)(A - \langle A\rangle)\rangle \\ &= \langle A^2 + \langle A\rangle^2 - 2\langle A\rangle A\rangle \\ &= \langle A^2\rangle + \langle\langle A\rangle^2\rangle - 2\langle A\rangle\langle A\rangle \\ &= \langle A^2\rangle + \langle A\rangle^2 - 2\langle A\rangle^2 \\ &= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\,.\end{aligned} \tag{114}$$

Dengan demikian, ketidakpastian pengukuran diperoleh sebagai:

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}\,. \tag{115}$$

- Jika sistem berada pada keadaan sembarang $|\psi\rangle$, maka (anggap $|\psi\rangle$ tak ternormalisasi):

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \\ &= \frac{\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \left(\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)^2 \\ &\geqslant 0\,.\end{aligned} \tag{116}$$

- Jika sistem berada pada keadaan $|\psi\rangle = |u_n\rangle$, dengan $|u_n\rangle$ keadaan eigen $\hat{A}$:

$$\hat{A}|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \,, \tag{117}$$

maka (anggap $|\psi\rangle$ dan $|u_n\rangle$ tak ternormalisasi):

$$\begin{aligned}
(\Delta A)^2 &= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \\
&= \frac{\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \left(\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)^2 \\
&= \frac{\langle u_n|\hat{A}^2|u_n\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle} - \left(\frac{\langle u_n|\hat{A}|u_n\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle}\right)^2 \\
&= \frac{\langle u_n|a_n^2|u_n\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle} - \left(\frac{\langle u_n|a_n|u_n\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle}\right)^2 \\
&= a_n^2 - a_n^2 \\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{118}$$

Dengan demikian, hasil pengukuran bersifat pasti 100%.

Ketidakpastian pengukuran dua besaran berhubungan dengan komutator operator dua besaran itu sebagai berikut (lihat Gasiorowicz Supplement 5-A):

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4}\left\langle i\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle^2 . \tag{119}$$

Apabila $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ komut, $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$, maka $\Delta A \Delta B \geqslant 0$, yang berarti besaran A dan B dapat diukur secara bersamaan dengan hasil kedua-duanya pasti, $\Delta A \to 0$ dan $\Delta B \to 0$. Sebaliknya, jika $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ tidak komut, $\left[\hat{A},\hat{B}\right] \neq 0$, maka $\Delta A \Delta B \geqslant$ *konstanta*, yang berarti besaran A dan B tidak dapat diukur secara bersamaan dengan hasil kedua-duanya pasti, $\Delta A \to 0$ atau $\Delta B \to 0$. Contoh, momentum linier dan posisi:

$$\begin{aligned}
(\Delta p)^2(\Delta x)^2 &\geqslant \frac{1}{4}\langle i\,[\hat{p},\hat{x}]\rangle^2 \\
&\geqslant \frac{1}{4}\left\langle i\frac{\hbar}{i}\right\rangle^2 \\
&\geqslant \frac{\hbar^2}{4} \\
\to \Delta p \Delta x &\geqslant \frac{\hbar}{2}\,.
\end{aligned} \tag{120}$$

Pengukuran momentum linier dan posisi pada secara bersamaan tidak dapat menghasilkan nilai momentum linier dan nilai posisi yang kedua-duanya pasti, sehingga orang harus memilih, yang mana yang dikehendaki. Jika dikehendaki nilai momentum, ukurlah saja momentum; jika dikehendaki nilai posisi, ukurlah saja posisi.

F. Perubahan nilai besaran terhadap waktu

Kita lihat perubahan nilai besaran fisika (nilai ekspektasi besaran fisika) terhadap waktu. Supaya lebih sederhana, kita ambil keadaan sembarang $|\psi(t)\rangle$ yang ternormalisasi, sehingga nilai ekspektasi besaran A menjadi:

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle \,. \tag{121}$$

Perubahan nilai ekspektasi besaran A terhadap waktu diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle A\rangle_t &= \frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle \\
&= \langle\psi(t)|\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}\right)|\psi(t)\rangle + \left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right)\hat{A}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{A}\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \\
&= \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle_t + \frac{1}{(-i\hbar)}\left(-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right)\hat{A}|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\hat{A}i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \\
&= \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle_t + \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|H\hat{A}|\psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|\hat{A}H|\psi(t)\rangle \\
&= \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle_t + \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|H\hat{A} - \hat{A}H|\psi(t)\rangle \\
&= \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle_t + \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|\left[H,\hat{A}\right]|\psi(t)\rangle \\
&= \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle_t + \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[H,\hat{A}\right]\right\rangle_t \,.
\end{aligned} \tag{122}$$

Kasus khusus, jika operator $\hat{A}$ tidak bergantung pada waktu secara eksaplisit, maka:

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = 0 \to \frac{d}{dt}\langle A\rangle_t = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[H,\hat{A}\right]\right\rangle_t \,. \tag{123}$$

Banyak operator besaran fisika yang tidak bergantung pada waktu secara eksplisit, sehingga persamaan (123) berlaku. Menurut persamaan (123), jika operator suatu besaran fisika dan hamiltonian komut, maka nilai besaran tersebut tetap dan besaran tersebut menjadi konstanta gerak (*constant of motion*):

$$\left[H,\hat{A}\right] = 0 \to \frac{d}{dt}\langle A\rangle_t = 0 \to \langle A\rangle_t = konstanta\,. \tag{124}$$

Operator energi total adalah hamiltonian H. Hamiltonian dan hamiltonian tentu komut, karena itu energi total tetap, energi total merupakan konstanta gerak.

Kita ambil operator posisi $\hat{x}$:

$$\begin{aligned}
[H,\hat{x}] &= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}), \hat{x}\right] \\
&= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x}\right] + \left[\hat{V}(\hat{x}), \hat{x}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2, \hat{x}\right] + 0 \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\left[\hat{p}, \hat{x}\right] + \left[\hat{p}, \hat{x}\right]\hat{p}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\frac{\hbar}{i} + \frac{\hbar}{i}\hat{p}\right) \\
&= \frac{\hbar}{i}\frac{\hat{p}}{m} \qquad (125)\\
\rightarrow \frac{d}{dt}\langle x\rangle_t &= \frac{\langle p\rangle_t}{m} \qquad (126)\\
\text{atau} \quad m\frac{d}{dt}\langle x\rangle_t &= \langle p\rangle_t\,. \qquad (127)
\end{aligned}
$$

Persamaan (127) kita kenal di mekanika klasik, namun bukan dalam nilai terukur momentum $\langle p\rangle$ dan posisi $\langle x\rangle$, melainkan dalam variabel momentum p dan posisi x. Dengan demikian, kita lihat bahwa yang di mekanika klasik kita perlakukan sebagai variabel besaran fisika, sesungguhnya itu adalah nilai terukur besaran fisika tersebut; relasi variabel besaran-besaran fisika di mekanika klasik sesungguhnya adalah relasi nilai terukur besaran-besaran itu. Di mekanika kuantum p dan x adalah variabel bebas, tidak saling bergantung, namun, nilai terukurnya $\langle p\rangle$ dan $\langle x\rangle$ saling berhubungan menurut persamaan (127).

Kita ambil operator momentum linier $\hat{p}$:

$$
\begin{aligned}
[H, \hat{p}] &= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}), \hat{p}\right] \\
&= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{p}\right] + \left[\hat{V}(\hat{x}), \hat{p}\right] \\
&= 0 + \left[\hat{V}(\hat{x}), \hat{p}\right] \\
&= \left[\hat{V}(\hat{x}), \hat{p}\right] \qquad (128)
\end{aligned}
$$

Kita cari $\left[\hat{V}(\hat{x}), \hat{p}\right]$ dan kita dapat mengerjakannya dalam ruang posisi:

$$
\begin{aligned}
\left[V(x), \hat{p}(x)\right]\psi(x) &= \left[V(x), \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right]\psi(x) \\
&= V(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x) - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}V(x)\psi(x) \\
&= V(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x) - V(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x) - \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}V(x)\right)\psi(x) \\
&= -\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}V(x)\right)\psi(x) \\
\rightarrow \left[V(x), \hat{p}(x)\right] &= -\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}V(x)\,. \qquad (129)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$
\frac{d}{dt}\langle p\rangle_t = -\left\langle \frac{d}{dx}V(x)\right\rangle_t \qquad (130)
$$

dan juga, melihat persamaan (127):

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle_t = -\left\langle \frac{d}{dx}V(x)\right\rangle_t . \tag{131}$$

Persamaan (131) tidak sama, melainkan hanya mirip, dengan yang kita kenal di mekanika klasik. Variabel momentum dan posisi di mekanika klasik sesungguhnya adalah nilai-nilai terukurnya, sehingga persamaan yang kita kenal di mekanika klasik, yang mirip dengan persamaan (131) adalah:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle_t = -\frac{d}{d\langle x\rangle_t}V\left(\langle x\rangle_t\right) . \tag{132}$$

G. Limit Klasik

Untuk partikel atau sistem mikroskopik tidak selalu harus atau perlu diterapkan mekanika kuantum, melainkan dapat diterapkan mekanika klasik. Sebagai contoh, untuk menghitung gerakan partikel bermuatan listrik dalam pengaruh medan listrik dan medan magnetik makroskopik, seperti dalam sebuah akselerator, cylcotron, spektrometer massa, mekanika klasik dapat diterapkan dengan hasil yang baik. Namun, kita telah lihat bahwa variabel besaran fisika di mekanika klasik sesungguhnya adalah nilai terukurnya, sehingga ditemui relasi antar besaran fisika di mekanika klasik berbeda dari yang di mekanika kuantum, seperti persamaan (132) dan (131). Kapan atau pada situasi apa relasi besaran fisika di mekanika klasik berlaku? Sebagai contoh, dari persamaan (131) dan (132), pada situasi apa berlaku:

$$\left\langle \frac{d}{dx}V(x)\right\rangle_t \simeq \frac{d}{d\langle x\rangle_t}V\left(\langle x\rangle_t\right) ? \tag{133}$$

Ambillah sebuah operator yang bergantung pada operator posisi, yaitu $F(\hat{x})$. Kita pilih ruang posisi, sehingga operator itu menjadi $F(x)$ (dalam ruang posisi, $\hat{x} = x$). Kita lakukan ekspansi Taylor untuk $F(x)$ di sekitar nilai terukur $\langle x\rangle$:

$$F(x) \simeq F(\langle x\rangle) + (x - \langle x\rangle)\left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{\langle x\rangle} + \frac{1}{2!}(x-\langle x\rangle)^2 \left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{\langle x\rangle} + \ldots . \tag{134}$$

Nilai ekspektasi $F(x)$ adalah:

$$\langle F(x)\rangle \simeq \langle F(\langle x\rangle)\rangle + \langle (x-\langle x\rangle)\rangle \left\langle \left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{\langle x\rangle}\right\rangle + \frac{1}{2!}\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle \left\langle \left.\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right|_{\langle x\rangle}\right\rangle + \ldots . \tag{135}$$

Apabila operator $F(x)$ tidak terlalu bergantung pada posisi, dapat diambil deret Taylor nilai ekspektasi $F(x)$ yang pendek, hanya sampai suku ke-2, karena suku-suku berikutnya (suku-suku orde tinggi) dapat diabaikan. Situasi lain yaitu ketika ketidakpastian pengukuran posisi $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle$ sangat kecil. (Perhatikan bahwa ketidakpastian pengukuran posisi sangat kecil bukan berarti secara mutlak $(\Delta x)^2 \to 0$, melainkan $(\Delta x)^2$ relatif sangat kecil dibandingkan dengan ukuran sistem yang dapat saja bersifat makroskopik, seperti akselerator dan spektrometer massa, yang di situ terdapat medan listrik dan medan magnetik makroskopik, nilainya relatif homogen di daerah yang relatif besar.) Apabila $(\Delta x)^2$ sangat kecil, maka deret Taylor nilai ekspektasi $F(x)$ menjadi pendek, karena suku-suku berikutnya dapat diabaikan:

$$\begin{aligned}\langle F(x)\rangle &\simeq \langle F(\langle x\rangle)\rangle + \langle (x-\langle x\rangle)\rangle \left\langle \left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{\langle x\rangle}\right\rangle \\ &\simeq \langle F(\langle x\rangle)\rangle + (\langle x\rangle-\langle x\rangle) \left\langle \left.\frac{d}{dx}F(x)\right|_{\langle x\rangle}\right\rangle \\ &\simeq \langle F(\langle x\rangle)\rangle\,. \end{aligned} \tag{136}$$

Ini menjawab pertanyaan seputar persamaan (133).