Catatan Mekanika Kuantum 1

Persamaan Schrödinger

Acuan utama Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 2, Subbab 1 – 5

Beberapa fenomena yang memicu lahirnya mekanika kuantum menunjukkan dualitas gelombang-partikel. Cahaya, yang sebelumnya dikenal bersifat sebagai gelombang, ternyata juga dapat bersifat sebagai partikel. Sebaliknya, elektron, yang sebelumnya dikenal bersifat sebagai partikel, ternyata juga dapat bersifat sebagai gelombang. Seperti apa fungsi gelombang yang dapat merepresentasikan elektron dan benda-benda mikro lainnya, seperti apa persamaan gelombangnya, dan lain-lain itu menjadi pertanyaan fisikawan. Di 1926 Erwin Schrödinger menyuguhkan suatu persamaan gelombang, yang kemudian disebut orang sebagai persamaan Schrödinger. Berangkat dari persamaan Schrödinger, mekanika kuantum dikembangkan sebagai suatu mekanika gelombang.

Di masa yang sama, mulai 1925 Werner Heisenberg mengembangkan suatu pendekatan lain terhadap perhitungan fenomena kuantum. Kemudian, bersama Max Born dan Pascual Jordan, Heisenberg merumuskan ulang pendekatannya dan melahirkan sesuatu yang dikenal orang sebagai mekanika matriks. Wolfgang Pauli menunjukkan di 1926 bahwa mekanika matriks dapat dipakai untuk menjelaskan spektrum atom hidrogen. Mekanika kuantum kemudian juga berkembang sebagai mekanika matriks.

Di 1926 Schrödinger menunjukkan bahwa mekanika gelombang dan mekanika matriks sesungguhnya ekivalen dan memberikan hasil yang sama. Mekanika kuantum sebagai mekanika gelombang dan mekanika kuantum sebagai mekanika matriks keduanya berbeda dalam hal representasi yang dipakai. Dalam mekanika gelombang digunakan operator matematis, seperti integral, differensial, untuk merepresentasikan besaran fisika dan fungsi matematis untuk merepresentasikan keadaan sistem, sedangkan dalam mekanika matriks digunakan matriks. Akan kita lihat bahwa tidak semua besaran fisika dapat direpresentasikan sebagai suatu operator matematis, sehingga diperlukan representasi matriks. Mekanika matriks, dengan demikian, berfungsi lebih umum. Dalam mekanika gelombang pun dapat kita kenali operasi-operasi yang merupakan operasi matriks, sehingga kita gunakan istilah-istilah yang biasa digunakan untuk matriks. Kita akan pelajari mekanika kuantum dalam representasi matriks di kuliah Mekanika Kuantum 2.

Untuk memudahkan kita mempelajari konsep-konsep mekanika kuantum, tanpa mengurangi maknanya, kita ambil sistem atau jagad yang sederhana. Dalam hal ini, kita pilih jagad satu dimensi, pada jagad itu kita dapat taruh sumbu x, yang memanjang dari $-\infty$ sampai ∞. Disamping itu, kita amati hanya satu partikel, bukan sistem lebih-dari-satu partikel (sistem partikel). Pada waktunya nanti kita ambil jagad tiga dimensi dan sistem partikel.

A. Paket gelombang

Fenomena partikel juga dapat bersifat sebagai gelombang menimbulkan pertanyaan, seperti apa wujud gelombang partikel tersebut, secara matematis seperti apa fungsi gelombangnya. Fenomena fotolistrik menunjukkan bahwa intensitas cahaya di suatu tempat, misalkan di lokasi cahaya mengenai permukaan logan, sebanding dengan jumlah quanta cahaya (foton) di tempat itu. Intensitas gelombang sebanding dengan kuadrat amplitudo gelombang. Dengan demikian, kuadrat amplitudo gelombang sebuah partikel harus memenuhi sifat partikel, yaitu menempati ruang seukuran partikel itu, yang berarti nilai kuadrat amplitudo gelombang besar hanya di suatu posisi tertentu (terlokalisasi), yang menunjukkan posisi partikel.

- Ambillah suatu gelombang bidang (*plane wave*), dengan fungsi gelombang sebagai berikut:

$$e^{i(kx-\omega t)}\,, \tag{1}$$

  dengan x adalah posisi, t waktu, k bilangan gelombang, ω frekuensi angular:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,, \quad \omega = 2\pi\nu\,, \tag{2}$$

  λ panjang gelombang, dan ν frekuensi. Gelombang bidang tersebut terentang di seluruh ruang (di sepanjang sumbu x). Kuadrat amplitudonya konstan di seluruh jagad, tidak terlokalisasi:

$$\left|e^{i(kx-\omega t)}\right|^2 = 1\,. \tag{3}$$

  Dengan demikian, fungsi gelombang bidang pada persamaan (1) tidak dapat merepresentasikan sebuah partikel.

- Kini, kita gabungkan (superposisikan) gelombang-gelombang bidang seperti pada persamaan (1) untuk nilai k yang beragam, masing-masing dengan bobot A_k yang berbeda:

$$\sum_k \Delta k A_k e^{i(kx-\omega t)}\,. \tag{4}$$

  Jika kita ambil semua nilai k yang mungkin dari $-\infty$ sampai ∞, dengan variasi yang sangat kecil (*infinitesimal*), maka kita dapatkan suatu grup gelombang atau paket gelombang $\psi(x,t)$ sebagai berikut:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k) e^{i(kx-\omega t)}\,. \tag{5}$$

- Kita amati paket gelombang pada suatu waktu t tertentu, supaya mudah, pada $t = 0$:

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k) e^{ikx}\,. \tag{6}$$

Kita coba fungsi bobot atau fungsi distribusi $A(k)$ berbentuk gaussian di sekitar $k = k_0$ sebagai berikut:

$$A(k) = e^{-\frac{1}{2}\alpha(k-k_0)^2} . \tag{7}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{1}{2}\alpha(k-k_0)^2} e^{ikx} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-x^2/(2\alpha)} e^{ik_0 x} . \end{aligned} \tag{8}$$

Paket gelombang $\psi(x,0)$ pada persamaan (8) juga merupakan gelombang bidang, namun dengan amplitudo berbentuk gaussian di sekitar $x = 0$:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-x^2/(2\alpha)} . \tag{9}$$

Jika kita hitung kuadrat amplitudo $\psi(x,0)$, diperoleh:

$$|\psi(x,0)|^2 = \frac{2\pi}{\alpha} e^{-x^2/\alpha} , \tag{10}$$

yang memiliki ukuran (lebar) tertentu di sekitar $x = 0$, bergantung pada nilai α; makin besar α, makin lebar $|\psi(x,0)|^2$, sebaliknya, makin kecil α, makin sempit $|\psi(x,0)|^2$. Sampai tahap ini kita lihat bahwa paket gelombang berpeluang dipakai sebagai gelombang yang merepresentasikan sebuah partikel. Berikutnya kita kaji lebih lanjut tentang hal ini, dengan mengamati paket gelombang selagi merambat.

B. Interpretasi peluang paket gelombang

Kini, kita amati paket gelombang yang merambat, dengan meng-ON-kan waktu $t > 0$:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k) e^{i(kx-\omega t)} . \tag{11}$$

Paket gelombang $\psi(x,t)$ merupakan gabungan banyak gelombang dengan frekuensi yang bermacam-macam. Pada kasus khusus, paket gelombang itu merambat di medium yang nondispersif, sehingga semua gelombang dengan frekuensi berbeda-beda di dalamnya merambat dengan kecepatan yang sama. Contohnya, gelombang cahaya putih yang merambat di vakum, semua gelombang cahaya dengan frekuensi berbeda-beda di dalamnya merambat dengan kecepatan yang sama, yaitu cepat rambat gelombang elektromagnetik di vakum. Pada keadaan yang lebih umum, medium tempat paket gelombang merambat bersifat dispersif, sehingga gelombang-gelombang dengan frekuensi yang berlain-lainan di dalam paket gelombang tersebut merambat dengan kecepatan yang berbeda-beda pula. Contohnya, gelombang cahaya putih yang masuk ke air diuraikan, karena gelombang-gelombang di dalamnya dengan frekuensi yang berbeda-beda merambat dengan kecepatan yang berbeda-beda, sehingga indeks bias untuk tiap frekuensi berbeda dan demikian pula sudut biasnya.

- Kasus khusus, paket gelombang merambat di medium nondispersif. Cepat rambat gelombang v untuk semua frekuensi ν sama:

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{2\pi}2\pi\nu = \frac{\omega}{k} \to \omega = kv\,. \tag{12}$$

Frekuensi angular ω merupakan fungsi bilangan gelombang k. Pada kasus ini, ω berubah secara linier terhadap k, yaitu $\omega(k) = kv$, sehingga dapat ditulis:

$$kx - \omega t = k(x - vt) \tag{13}$$

dan paket gelombang bergantung pada posisi x dan waktu t menurut $x - vt$:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)e^{ik(x-vt)} = \psi(x - vt)\,. \tag{14}$$

Dengan demikian, dalam perambatannya $\psi(x,t)$ tidak mengalami perubahan bentuk; kurva $\psi(x,t)$ tidak berubah, hanya berpindah posisi sejauh vt. Apabila $\psi(x,0)$ berada di, misalkan x_0, dan memiliki lebar tertentu, maka seterusnya $\psi(x,t)$ tetap memiliki lebar yang sama, namun berpindah ke $x_0 + vt$. Ini tentu sesuai dengan gambaran sebuah partikel, yang bentuknya tetap selama bergerak. Namun, kita tidak boleh menarik kesimpulan hanya berdasarkan kasus khusus. Kita harus perhatikan kasus umum.

- Kasus umum, paket gelombang merambat di medium dispersif. Pada kasus ini, $\omega(k)$ merupakan suatu fungsi sembarang, bergantung pada sifat medium yang dilewati gelombang. Inilah keadaan umum, yang kita pakai untuk memahami paket gelombang $\psi(x,t)$ sebagai representasi partikel. Sekedar untuk mendapatkan gambaran, kita ambil ω yang tidak terlalu berubah terhadap k, namun perubahannya lebih dari sekedar bersifat linier. Jadi, kita dapat uraikan $\omega(k)$ dalam deret Taylor di sekitar $k = k_0$ sampai orde 2:

$$\begin{aligned}\omega(k) &\simeq \omega(k_0) + (k-k_0)\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0}\\ &\simeq \omega(k_0) + (k-k_0)v_g + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta\,, \quad \left(v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0},\ \beta = \left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

dengan v_g adalah kecepatan grup (*group velocity*) paket gelombang (ingat kembali kuliah gelombang). Selanjutnya, dapat ditulis:

$$\begin{aligned}kx - \omega(k)t &= (k-k_0)x + k_0x - \omega(k)t\\ &\simeq (k-k_0)x + k_0x - \omega(k_0)t - (k-k_0)v_gt - \frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta t\\ &\simeq k_0x - \omega(k_0)t + (k-k_0)(x - v_gt) - \frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta t\,,\end{aligned} \tag{16}$$

sehingga diperoleh paket gelombang $\psi(x,t)$ sebagai berikut:

$$\psi(x,t) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)e^{i\left(k_0x - \omega(k_0)t + (k-k_0)(x-v_gt) - \frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta t\right)}$$

$$\simeq e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)e^{i\left((k-k_0)(x-v_gt)-\frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta t\right)} . \qquad (17)$$

Kita masukkan $A(k)$ dari persamaan (7), diperoleh:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &\simeq e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{1}{2}\alpha(k-k_0)^2} e^{i\left((k-k_0)(x-v_gt)-\frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta t\right)} \\
&\simeq e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{1}{2}(k-k_0)^2(\alpha+i\beta t)} e^{i(k-k_0)(x-v_gt)} \\
&\simeq e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-\frac{1}{2}q^2(\alpha+i\beta t)} e^{iq(x-v_gt)}\,, \quad (q=k-k_0) \\
&\simeq e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha+i\beta t}}e^{-(x-v_gt)^2/(2(\alpha+i\beta t))} . \qquad (18)
\end{aligned}$$

Paket gelombang $\psi(x,t)$ pada persamaan (18) merupakan gelombang bidang, dengan amplitudo yang bergantung pada waktu:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha+i\beta t}}e^{-(x-v_gt)^2/(2(\alpha+i\beta t))} . \qquad (19)$$

Kuadrat amplitudo $\psi(x,t)$ diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned}
|\psi(x,t)|^2 &\simeq \left|\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha+i\beta t}}e^{-(x-v_gt)^2/(2(\alpha+i\beta t))}\right|^2 \\
&\simeq \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}}e^{-\alpha(x-v_gt)^2/(\alpha^2+\beta^2t^2)} . \qquad (20)
\end{aligned}$$

Dengan bertambahnya waktu t, nilai $\alpha^2+\beta^2t^2$ membesar, sehingga $|\psi(x,t)|^2$ bukan hanya mengecil nilainya, namun juga melebar ukurannya. Dengan demikian, paket gelombang $\psi(x,t)$ selama merambat dengan kecepatan grup v_g mengalami perubahan bentuk, semakin lebar. Jika kita anggap $\psi(x,t)$ merepresentasikan sebuah partikel, maka partikel tersebut ukurannya berubah menjadi semakin besar. Ini tentu saja tidak sesuai dengan kenyataan. Pada kenyataannya, contoh, elektron tetap sebesar elektron selama bergerak, atom tetap sebesar ukurannya. Jadi, ditemui masalah, bahwa paket gelombang tidak dapat diterima sebagai representasi sebuah partikel.

Paket gelombang sulit diterima sebagai representasi partikel, apabila paket gelombang dianggap sebagai gelombang fisis (contoh gelombang fisis, antara lain, gelombang elektromagnetik, gelombang tali; pada gelombang fisis ada usikan besaran fisika yang merambat). Max Born di 1926 menyatakan pemikirannya bahwa fungsi gelombang dalam mekanika kuantum bukan merepresentasikan suatu gelombang fisis, melainkan merepresentasikan pengetahuan kita tentang keadaan partikel yang dihubungkan dengan fungsi gelombang tersebut. Fungsi gelombang dapat memberikan informasi tentang keadaan partikel tersebut, seperti posisinya, momentumnya, energinya. Dari fungsi gelombang itu kita dapat memperoleh informasi mengenai keadaan partikel. Secara singkat, kita sebut saja bahwa fungsi gelombang suatu partikel merepresentasikan keadaan partikel tersebut. Jadi, yang direpresentasikan adalah keadaan partikel tersebut, bukan wujud fisik partikel itu sendiri. Kemudian, menurut Max Born kuadrat amplitudo fungsi gelombang sebuah partikel di suatu tempat berhubungan dengan peluang mendapatkan partikel tersebut di tempat itu. Jika kuadrat amplitudo itu besar namun sempit, misalkan dari $x_0 - \epsilon$ sampai $x_0 + \epsilon$, dengan ϵ bernilai kecil, berarti peluang kita mendapatkan partikel itu di posisi x_0 besar. Ini menunjukkan suatu kepastian yang besar mengenai keberadaan partikel di posisi tertentu. Apabila kuadrat amplitudo itu lebar, berarti keberadaan partikel di suatu posisi tertentu kurang atau tidak dapat dipastikan secara tepat. Contoh ekstrim, jika kuadrat amplitudo seperti pada persamaan (3), itu berarti kita sama sekali tidak tahu partikel berada di mana, karena partikel dapat berada di mana saja dengan peluang yang sama.

Menurut interpretasi Born, dengan demikian, mengecil dan melebarnya $|\psi(x,t)|^2$ pada persamaan (20) selama merambat dapat dipahami dan tidak menjadi masalah. Mula-mula ($t = 0$) keberadaan partikel diketahui secara lebih pasti (bergantung pada nilai α) di sekitar $x = 0$. Pada waktu-waktu berikutnya ($t > 0$), perkiraan mengenai keberadaan partikel makin tidak dapat ditentukan secara pasti dan daerah tempat partikel mungkin berada pun makin lebar. Sekedar ilustrasi, misalkan kita melihat seekor lalat melintas. Pada saat itu kita tahu posisi lalat itu. Detik berikutnya kita tidak tahu pasti lalat itu ada di mana, namun kita perkirakan lalat itu masih di dalam ruangan. Menit berikutnya kita makin tidak tahu lalat itu ada di mana, namun kita perkirakan lalat itu ada di suatu tempat di dalam rumah. Demikian seterusnya, kita makin tidak tahu pasti lalat itu ada di mana dan daerah tempat lalat itu mungkin berada makin luas.

C. Persamaan Schrödinger

Di 1926 Schrödinger bukan hanya menyuguhkan persamaan gelombang mekanika kuantum, melainkan juga berhasil menerapkannya untuk atom hidrogen. Dengan demikian, persamaannya berfungsi, sehingga orang dapat menerimanya. Meskipun demikian, tidak ada orang yang tahu bagaimana Schrödinger mendapatkan atau menurunkan persamaannya tersebut. Untuk jagad satu dimensi, persamaan Schrödinger dinyatakan sebagai berikut:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t)\,, \tag{21}$$

dengan $i = \sqrt{-1}$, $\hbar = h/(2\pi)$, m massa partikel, $\psi(x,t)$ fungsi gelombang yang merepresentasikan keadaan partikel, dan $V(x)$ energi potensial yang merepresentasikan interaksi atau gaya yang mempengaruhi keadaan partikel. Untuk kasus partikel bebas, $V(x) = 0$ dan persamaan Schrödinger menjadi:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\,. \tag{22}$$

Kita bahas sedikit kasus partikel bebas:

- Paket gelombang $\psi(x,t)$ pada persamaan (5) merepresentasikan keadaan partikel bebas.

Energi partikel bebas hanya berupa energi kinetik. Dengan menggunakan relasi berikut:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)\left(\frac{h}{\lambda}\right) = \frac{p}{\hbar}, \quad \text{(menerapkan ide panjang gelombang de Broglie)} \tag{23}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \left(\frac{2\pi}{h}\right)(h\nu) = \frac{E}{\hbar}, \quad \text{(menerapkan ide quanta Planck)} \tag{24}$$

untuk partikel bermassa m, kita peroleh:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p}{m}, \tag{25}$$

yang sesuai dengan relasi antara momentum, massa, dan kecepatan. Dengan demikian, $\psi(x,t)$ merepresentasikan keadaan partikel bebas bermassa m, yang bergerak dengan kecepatan v_g.

- Dengan menggunakan persamaan (23) dan (24), kita tulis ulang $\psi(x,t)$ menjadi:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, A(p) e^{i(px-Et)/\hbar}. \tag{26}$$

Kita bebas memilih faktor konstan di depan integral pada persamaan (26) (contoh, ingat kembali transformasi Fourier) dan dapat mengganti $A(p)$ dengan notasi lain, sehingga terakhir kita tulis paket gelombang $\psi(x,t)$ sebagai:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \phi(p) e^{i(px-Et)/\hbar}. \tag{27}$$

- Kita lihat bahwa $\psi(x,t)$ memenuhi persamaan Schrödinger untuk partikel bebas:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p)e^{i(px-Et)/\hbar} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p)e^{i(px-Et)/\hbar} \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i(px-Et)/\hbar} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i(px-Et)/\hbar} \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p)E(p)e^{i(px-Et)/\hbar} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p)\left(\frac{p^2}{2m}\right)e^{i(px-Et)/\hbar}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Sesuai, bahwa untuk partikel bebas $E = p^2/(2m)$.

Mari kita lihat persamaan (27) sebagai kebalikan transformasi Fourier, dengan memasukkan kebergantungan pada waktu t ke dalam $\phi(p,t)$:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi(p,t)e^{ipx/\hbar}. \tag{29}$$

Dengan demikian, kita dapatkan $\phi(p,t)$ sebagai transformasi Fourier dari $\psi(x,t)$:

$$\phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi(x,t)e^{-ipx/\hbar}. \tag{30}$$

Kita lihat bahwa, dengan demikian, $\phi(p,t)$, begitu juga $\phi(p)$ untuk $t = 0$, bukan sekedar fungsi distribusi (lihat kembali, contoh, persamaan (7)), melainkan juga sebuah paket gelombang atau, secara umum, fungsi gelombang dalam mekanika kuantum, yang merepresentasikan keadaan yang sama dengan yang direpresentasikan oleh $\psi(x,t)$. Jika $\psi(x,t)$ merepresentasikan suatu keadaan dalam ruang posisi x, maka $\phi(p,t)$ merepresentasikan keadaan yang sama, namun dalam ruang momentum p. Sampai di sini kita bertemu dengan yang dikenal sebagai representasi. Suatu keadaan dapat direpresentasikan dalam bentuk yang bervariasi, dalam ruang yang berlainan.

D. Ketidakpastian Heisenberg

Kita kembali ke paket gelombang pada waktu $t = 0$ pada persamaan (6). Kuadrat fungsi distribusi $A(k)$ pada persamaan (7) adalah:

$$|A(k)|^2 = e^{-\alpha(k-k_0)^2} \,. \tag{31}$$

Lebar kurva $|A(k)|^2$, yaitu Δk, dapat ditentukan pada nilai e^{-1}, yaitu pada $k - k_0 = \pm 1/\sqrt{\alpha}$. Dengan demikian:

$$\Delta k = 2/\sqrt{\alpha} \,. \tag{32}$$

Dengan cara yang sama, lebar kurva $|\psi(x,0)|^2$ pada persamaan (10) diperoleh pada nilai $(2\pi/\alpha)e^{-1}$, yaitu:

$$\Delta x = 2\sqrt{\alpha} \,. \tag{33}$$

Kita dapatkan $\Delta k \Delta x = 4 =$ konstan, tidak bergantung pada parameter α. Jika kita ambil fungsi $A(k)$ yang berbeda dari yang diberikan di persamaan (7), mungkin saja diperoleh nilai konstan yang bukan 4. Penting dicatat bahwa hubungan Δk dan Δx, dengan begitu, bersifat berkebalikan (*reciprocal*): Jika Δk besar, Δx kecil, dan sebaliknya, jika Δk kecil, Δx besar. Hubungan

$$\Delta k \Delta x = konstan \,, \quad (konstan > 0) \,, \tag{34}$$

sesungguhnya, sudah dikenal dalam matematika, mengingat persamaan (6) merupakan kebalikan transformasi Fourier. Dengan menerapkan persamaan (23), kita dapatkan:

$$\Delta p \Delta x = konstan \times \hbar \,, \quad (konstan > 0) \,. \tag{35}$$

Dalam mekanika kuantum, Δp dan Δx secara berturut-turut menyatakan ketelitian dalam pengukuran momentum dan posisi, sehingga secara lebih umum dinyatakan

$$\Delta p \Delta x \geqslant konstan \times \hbar \,, \quad (konstan > 0) \,. \tag{36}$$

Persamaan (36) sesuai dengan relasi antara Δp dan Δx yang dikemukakan oleh Heisenberg, yaitu:

$$\Delta p \Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2} \,, \tag{37}$$

yang dikenal sebagai ketidakpastian Heisenberg. Menurut ketidakpastian Heisenberg, tidak mungkin melakukan pengukuran momentum dan posisi partikel pada saat bersamaan, yang memberikan hasil yang sangat teliti untuk kedua-duanya. Orang dapat mengukur momentum sebuah partkel dengan secara tepat, namun tidak dapat mengetahui posisinya secara pasti. Sebaliknya, orang dapat mengukur posisi sebuah partkel dengan secara tepat, namun tidak dapat mengetahui momentumnya secara pasti. Heisenberg juga mendapatkan untuk pengukuran energi relasi berikut:

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar \,, \tag{38}$$

Perhatikan bahwa momentum dan posisi tidak dapat diukur atau diketahui secara tepat pada saat bersamaan, begitu pula, energi dan waktu tidak dapat diukur atau diketahui secara tepat pada saat bersamaan, keterbatasan itu bukanlah diakibatkan ketelitian alat ukur, melainkan memang merupakan sifat fenomena kuantum, sifat alam.