

Isospin

Basis state yang dipakai dalam perhitungan hamburan dengan spin tidak nol adalah

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle \equiv |\mathbf{p}\rangle|\lambda\rangle \equiv |\mathbf{p}\rangle|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle. \quad (1)$$

Dengan memakai basis state $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ pada Eq. (1) keadaan isospin sistem belum diperhitungkan. Pada kenyataannya, isospin juga harus diperhitungkan dan model-model interaksi juga bergantung pada isospin. Contoh, hamburan kaon-nukleon (KN). Kaon dan nukleon masing-masing berisospin $\frac{1}{2}$, masing-masing memiliki dua keadaan isospin yang mungkin. Untuk kaon:

$$K^+ = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \quad K^0 = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

(Catat bahwa $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ juga dapat dipakai untuk menyatakan anti partikel K^+ , yaitu K^-). Untuk nukleon:

$$p = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \quad n = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Isospin total τ sistem KN bisa bernilai 0 atau 1.¹ Ambillah $|\tau\nu\rangle$ sebagai keadaan isospin total KN. Keadaan dengan $\nu = 1$ dan $\nu = -1$ hanya ada untuk nilai isospin total $\tau = 1$, yaitu $|11\rangle$ dan $|1, -1\rangle$, sedangkan keadaan dengan $\nu = 0$ ada untuk nilai isospin total $\tau = 0$ maupun $\tau = 1$, yaitu $|00\rangle$ dan $|10\rangle$. Untuk sistem K^+p ($\nu = 1$) dan sistem K^0n ($\nu = -1$) (demikian pula sistem K^-n , $\nu = -1$), keadaan isospin total yang mungkin adalah hanya yang memiliki nilai $\tau = 1$, yaitu $|11\rangle$ dan $|1, -1\rangle$. Untuk sistem K^0p (demikian pula sistem K^-p) dan sistem K^+n berlaku $\nu = 0$, sehingga keadaan isospin total yang mungkin adalah yang memiliki nilai $\tau = 0$ dan $\tau = 1$, yaitu $|00\rangle$ dan $|10\rangle$.

Untuk juga memperhitungkan isospin, kita tambahkan keadaan isospin total $|\tau\nu\rangle$ pada *basis state* di Eq. (1), sehingga *basis state* yang dipakai adalah $|\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle$:²

$$|\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle \equiv |\mathbf{p}\lambda\rangle|\tau\nu\rangle. \quad (2)$$

Contoh, elemen T-matrix dalam basis Eq. (2) dinyatakan sebagai (berlaku kekekalan isospin total):

$$T_{\lambda'\lambda}^{\tau'\tau}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}'\lambda'\tau' | T | \mathbf{p}\lambda\tau \rangle. \quad (3)$$

¹Isospin bukan momentum angular, namun penjumlahannya mengikuti penjumlahan momentum angular. Penjumlahan dua isospin $\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}$ menghasilkan isospin total dengan nilai $\tau = |\tau_1 - \tau_2|, |\tau_1 - \tau_2| + 1, \dots, \tau_1 + \tau_2 - 1, \tau_1 + \tau_2$ dan nilai komponen z $\tau_z = \tau_{1,z} + \tau_{2,z}$.

²Yang kita pakai dalam *basis state* adalah keadaan isospin total $|\tau\nu\rangle$, bukan produk (perkalian) keadaan isospin partikel 1 dan partikel 2 $|\tau_1\nu_1\rangle|\tau_2\nu_2\rangle$, karena model-model interaksi yang dibuat orang biasanya diparametrisasi menurut keadaan isospin total.

Normalisasi *basis state* $|\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle$ adalah:

$$\langle \mathbf{p}'\lambda'\tau'\nu' | \mathbf{p}\lambda\tau\nu \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{\tau'\tau}\delta_{\nu'\nu} \quad (4)$$

dan relasi kelengkapannya (*completeness relation*):

$$\sum_{\lambda\tau\nu} \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle \langle \mathbf{p}\lambda\tau\nu| = 1. \quad (5)$$

Pengukuran (perhitungan) besaran hamburan dikerjakan untuk keadaan isospin tertentu dari masing-masing partikel $|\tau_1\nu_1\rangle|\tau_2\nu_2\rangle$, yang berarti memakai *basis state* $|\mathbf{p}\lambda\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2\rangle \equiv |\mathbf{p}\lambda\rangle|\tau_1\nu_1\rangle|\tau_2\nu_2\rangle$. Contoh, spin-averaged differential cross section hamburan KN dihitung menurut (lihat catatan besaran spin):

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{p}}'}} &= \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2 \sum_{\lambda',\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\langle p\hat{\mathbf{p}}'\lambda'\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2 | T | \mathbf{p}\lambda\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2 \sum_{\lambda',\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T_{\lambda'\lambda}^{\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2}(p\hat{\mathbf{p}}', \mathbf{p})|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Pada rumus umum besaran spin:

$$I\overline{\langle \sigma_\alpha \rangle}_f = \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2 \sum_{\beta=0}^3 \overline{\langle \sigma_\beta \rangle}_i \text{Tr} (T\sigma_\beta T^+ \sigma_\alpha), \quad (7)$$

elemen T-matrix dihitung dalam basis $|\mathbf{p}\lambda\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2\rangle$. Relasi antar kedua *basis state* $|\mathbf{p}\lambda\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2\rangle$ dan $|\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle$ dapat dinyatakan dengan bantuan koefisien Clebsch-Gordan $C(\tau_1\tau_2\tau; \nu_1\nu_2\nu)$ sebagai berikut:

$$|\mathbf{p}\lambda\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2\rangle = \sum_{\tau} C(\tau_1\tau_2\tau; \nu_1\nu_2\nu) |\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle, \quad (8)$$

sehingga kita dapatkan juga relasi antara elemen matriks $T_{\lambda'\lambda}^{\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ dan $T_{\lambda'\lambda}^{\tau\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ sebagai berikut (berlaku kekekalan isospin total):

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}^{\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \langle \mathbf{p}'\lambda'\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2 | T | \mathbf{p}\lambda\tau_1\nu_1\tau_2\nu_2 \rangle \\ &= \sum_{\tau'\tau} C(\tau_1\tau_2\tau'; \nu_1\nu_2\nu) C(\tau_1\tau_2\tau; \nu_1\nu_2\nu) \langle \mathbf{p}'\lambda'\tau'\nu' | T | \mathbf{p}\lambda\tau\nu \rangle \\ &= \sum_{\tau} C^2(\tau_1\tau_2\tau; \nu_1\nu_2\nu) T_{\lambda'\lambda}^{\tau\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (9)$$

Pada perhitungan hamburan, kita cari dahulu elemen T-matrix untuk tiap keadaan isospin total yang mungkin dalam basis $|\mathbf{p}\lambda\tau\nu\rangle$. Setelah itu, kita gabungkan elemen T-matrix dari semua keadaan isospin total yang mungkin menurut Eq. (9). Kemudian, kita hitung besaran-besaran hamburan menurut rumus umum Eq. (7).