Helicity dan Operator Rotasi

1 Helicity

Seperti semua momentum angular, besaran spin ditunjukkan oleh nilainya s (s = panjang vektor spin $\mathbf{S}$) dan salah satu komponennya, biasanya komponen z S_z (sumbu z menjadi sumbu kuantisasi spin). Untuk menghitung nilai spin dipakai operator $\mathbf{S}^2$. Operator $\mathbf{S}^2$ dan S_z memiliki *eigenstate* bersama $|s\lambda\rangle$, yang memenuhi persamaan *eigenvalue* ($\hbar = c = 1$):

$$\mathbf{S}^2|s\lambda\rangle = s(s+1)|s\lambda\rangle \tag{1}$$

$$S_z|s\lambda\rangle = \lambda|s\lambda\rangle\,. \tag{2}$$

Orthogonality dan *completeness relation* $|s\lambda\rangle$:

$$\langle s'\lambda'|s\lambda\rangle = \delta_{s's}\delta_{\lambda'\lambda} \tag{3}$$

$$\sum_{s\lambda} |s\lambda\rangle\langle s\lambda| = 1\,. \tag{4}$$

Untuk selanjutnya, sumbu kuantisasi z dicantumkan secara eksplisit, yaitu $S_z \to \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}}$ dan $|s\lambda\rangle \to |\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle$, sehingga Eq. (2) dapat ditulis:

$$(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle = \lambda|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle\,. \tag{5}$$

Sebagai sumbu kuantisasi dapat dipilih selain sumbu z. Untuk partikel yang bergerak dengan momentum linier $\mathbf{p}$, arah momentum $\hat{\mathbf{p}}$ dapat dipilih sebagai sumbu kuantisasi. Komponen spin $\mathbf{S}$ pada arah $\hat{\mathbf{p}}$, yaitu $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$, disebut helicity. Helicity $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ memiliki *eigenstate* $|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle$, yang juga merupakan *eigenstate* $\mathbf{S}^2$:

$$\mathbf{S}^2|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle = s(s+1)|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle \tag{6}$$

$$(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle = \lambda|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle\,. \tag{7}$$

Orthogonality dan *completeness relation* $|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle$:

$$\langle\hat{\mathbf{p}}s'\lambda'|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle = \delta_{s's}\delta_{\lambda'\lambda} \tag{8}$$

$$\sum_{s\lambda} |\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle\langle\hat{\mathbf{p}}s\lambda| = 1\,. \tag{9}$$

Perhatikan bahwa $|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle$ bukan *eigenstate* S_z dan sebaliknya $|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle$ bukan *eigenstate* $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$.

2 Operator rotasi

Helicity $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ dan S_z keduanya komponen spin yang sama $\mathbf{S}$, namun berbeda sumbu proyeksi. Demikian pula, $|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle$ dan $|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle$ *eigenstate* operator spin yang sama $\mathbf{S}^2$, namun berbeda sumbu kuantisasi. $|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle$ dapat diperoleh dengan memutar $|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle$, demikian pula $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ dapat diperoleh dengan memutar S_z, menggunakan operator rotasi $R_s(\hat{\mathbf{p}})$ (label s menunjukkan bahwa rotasi terjadi di ruang spin):

$$|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle = R_s(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle \tag{10}$$

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}} = R_s(\hat{\mathbf{p}})S_zR_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R_s(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})\,, \tag{11}$$

dengan $R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R_s^{+}(\hat{\mathbf{p}})$. Operator $R_s(\hat{\mathbf{p}})$ merupakan operator *unitary*:

$$R_s(\hat{\mathbf{p}})R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}}) = 1\,, \tag{12}$$

sehingga:

$$R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle = R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle = |\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle \tag{13}$$

$$R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}}) = R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})\,. \tag{14}$$

Eq. (7) dapat diperoleh dari Eq. (2), dan sebaliknya, juga dengan menggunakan operator $R_s(\hat{\mathbf{p}})$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle &= \lambda|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow R_s(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle &= R_s(\hat{\mathbf{p}})\lambda|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow R_s(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle &= \lambda R_s(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow R_s(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle &= \lambda R_s(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow (\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle &= \lambda|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle &= \lambda|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle &= R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})\lambda|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle &= \lambda R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}})R_s(\hat{\mathbf{p}})R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle &= \lambda R_s^{-1}(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle \\
\rightarrow (\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}})|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle &= \lambda|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle
\end{aligned} \tag{16}$$

Pada suatu proses rotasi, bayangkan ada sumbu rotasi $\hat{\mathbf{n}}$ dan terhadap sumbu rotasi tersebut dilakukan rotasi sebesar sudut θ, sesuai aturan tangan kanan. Operator R_s yang sesuai dengan rotasi tersebut adalah:

$$R_s = e^{-i\theta\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\,, \tag{17}$$

Rotasi tunggal tersebut dapat diganti dengan tiga rotasi berurutan dengan sudut yang sesuai: (1) terhadap sumbu z sebesar sudut α, (2) terhadap sumbu y' (sumbu y baru setelah rotasi pertama) sebesar sudut β, (3) terhadap sumbu z" (sumbu z baru setelah 2 rotasi sebelumnya) sebesar sudut γ. Operator 3 rotasi ini:

$$R_s(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\gamma S_{z''}} e^{-i\beta S_{y'}} e^{-i\alpha S_z} \,. \tag{18}$$

Namun, tiga rotasi tersebut dapat diganti dengan tiga rotasi berurutan, yang semuanya berlaku terhadap sumbu koordinat awal, sehingga evaluasinya lebih mudah, yaitu (1) terhadap sumbu z sebesar sudut γ, (2) terhadap sumbu y sebesar sudut β, (3) kembali terhadap sumbu z sebesar sudut α:

$$\begin{aligned} R_s(\alpha\beta\gamma) &= e^{-i\gamma S_{z''}} e^{-i\beta S_{y'}} e^{-i\alpha S_z} \\ &= e^{-i\alpha S_z} e^{-i\beta S_y} e^{-i\gamma S_z} \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Tiga sudut α, β, γ pada operator rotasi tersebut disebut sudut Euler. Elemen matriks $R_s(\alpha\beta\gamma)$ dalam basis $|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle$ adalah:

$$\begin{aligned} D^s_{\lambda'\lambda}(\alpha\beta\gamma) &= \langle \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | R_s(\alpha\beta\gamma) | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle \\ &= \langle \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | e^{-i\alpha S_z} e^{-i\beta S_y} e^{-i\gamma S_z} | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle \\ &= \langle e^{i\alpha S_z} \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | e^{-i\beta S_y} e^{-i\gamma S_z} | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle \\ &= \langle e^{i\lambda'\alpha} \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | e^{-i\beta S_y} e^{-i\lambda\gamma} | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle \\ &= e^{-i\lambda'\alpha} \langle \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | e^{-i\beta S_y} | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle e^{-i\lambda\gamma} \\ &= e^{-i\lambda'\alpha} d^s_{\lambda'\lambda}(\beta) e^{-i\lambda\gamma} \end{aligned} \tag{20}$$

$$d^s_{\lambda'\lambda}(\beta) = \langle \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | e^{-i\beta S_y} | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle \,. \tag{21}$$

Diperoleh bahwa $d^s_{\lambda'\lambda}(\beta)$ bernilai real. Contoh, untuk $s = \frac{1}{2}$:

$$d^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \,. \tag{22}$$

Untuk keperluan rotasi pada Eqs. (10) dan (11) ($\hat{\mathbf{z}} \to \hat{\mathbf{p}}$) diperlukan cukup hanya 2 rotasi (2 sudut Euler). Jika arah $\hat{\mathbf{p}}$ dalam koordinat bola dinyatakan dengan sudut θ dan ϕ, dua rotasi tersebut: (1) terhadap sumbu y sebesar sudut θ dan (2) terhadap sumbu z sebesar sudut ϕ, sehingga:

$$R_s(\hat{\mathbf{p}}) = R_s(\phi\theta 0) = e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} \tag{23}$$

Diperoleh proyeksi $|\hat{\mathbf{p}}s\lambda\rangle$ pada $|\hat{\mathbf{z}}s\lambda\rangle$:

$$\langle \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | \hat{\mathbf{p}}s\lambda \rangle = \langle \hat{\mathbf{z}}s\lambda' | R_s(\phi\theta 0) | \hat{\mathbf{z}}s\lambda \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= D^s_{\lambda'\lambda}(\phi\theta 0) \\
&= \langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda' | e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} | \hat{\mathbf{z}} s\lambda \rangle \\
&= e^{-i\lambda'\phi} \langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda' | e^{-i\theta S_y} | \hat{\mathbf{z}} s\lambda \rangle \\
&= e^{-i\lambda'\phi} d^s_{\lambda'\lambda}(\theta)
\end{aligned} \tag{24}
$$

dan elemen matriks $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ dalam basis $|\hat{\mathbf{z}} s\lambda\rangle$ (gunakan Eqs. (7), (9)), dan (24):

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda' | \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}} | \hat{\mathbf{z}} s\lambda \rangle &= \sum_{\lambda''} \langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda' | \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}} | \hat{\mathbf{p}} s\lambda'' \rangle \langle \hat{\mathbf{p}} s\lambda'' | \hat{\mathbf{z}} s\lambda \rangle \\
&= \sum_{\lambda''} \lambda'' \langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda' | \hat{\mathbf{p}} s\lambda'' \rangle \langle \hat{\mathbf{p}} s\lambda'' | \hat{\mathbf{z}} s\lambda \rangle \\
&= \sum_{\lambda''} \lambda'' \langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda' | \hat{\mathbf{p}} s\lambda'' \rangle \langle \hat{\mathbf{z}} s\lambda | \hat{\mathbf{p}} s\lambda'' \rangle^* \\
&= \sum_{\lambda''} \lambda'' e^{-i\lambda'\phi} d^s_{\lambda'\lambda''}(\theta) e^{i\lambda\phi} d^s_{\lambda\lambda''}(\theta) \\
&= \sum_{\lambda''} \lambda'' e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} d^s_{\lambda'\lambda''}(\theta) d^s_{\lambda\lambda''}(\theta)\,,
\end{aligned} \tag{25}
$$

Untuk $s = \frac{1}{2}$, $\lambda', \lambda = \pm\frac{1}{2}$. Dengan kata lain, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ dan $\lambda' = \pm\lambda$. Diperoleh (lihat Eq. (22)):

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{2}\lambda' \middle| \hat{\mathbf{p}}\frac{1}{2}\lambda \right\rangle &= e^{-i\lambda'\phi} d^s_{\lambda'\lambda}(\theta) \\
&= e^{-i\lambda'\phi} \left[\delta_{\lambda'\lambda} d^s_{\lambda\lambda}(\theta) + \delta_{\lambda',-\lambda} d^s_{-\lambda\lambda}(\theta) \right] \\
&= e^{-i\lambda'\phi} \left[\delta_{\lambda'\lambda} \cos\frac{\theta}{2} + 2\lambda\delta_{\lambda',-\lambda} \sin\frac{\theta}{2} \right]\,.
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{2}\lambda' \middle| \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}} \middle| \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{2}\lambda \right\rangle &= \sum_{\lambda''} \lambda'' e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} d^s_{\lambda'\lambda''}(\theta) d^s_{\lambda\lambda''}(\theta) \\
&= \frac{1}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} d^s_{\lambda'\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda\frac{1}{2}}(\theta) - \frac{1}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} d^s_{\lambda',-\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda,-\frac{1}{2}}(\theta) \\
&= \frac{1}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} \left[d^s_{\lambda'\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda\frac{1}{2}}(\theta) - d^s_{\lambda',-\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda,-\frac{1}{2}}(\theta) \right] \\
&= \frac{1}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} \left\{ \delta_{\lambda'\lambda} \left[d^s_{\lambda\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda\frac{1}{2}}(\theta) - d^s_{\lambda,-\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda,-\frac{1}{2}}(\theta) \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_{\lambda',-\lambda} \left[d^s_{-\lambda\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda\frac{1}{2}}(\theta) - d^s_{-\lambda,-\frac{1}{2}}(\theta) d^s_{\lambda,-\frac{1}{2}}(\theta) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} \left\{ 2\lambda\delta_{\lambda'\lambda} \left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \right] + \delta_{\lambda',-\lambda} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi} \left\{ 2\lambda\delta_{\lambda'\lambda}\cos\theta + \delta_{\lambda',-\lambda}\sin\theta \right\}\,.
\end{aligned} \tag{27}
$$