General Formula for Spin Observables of Spin Half

1 Hamburan dengan memperhitungkan spin ($s =$ *integer* maupun *half-odd*)

- Tanpa spin, keadaan hamburan adalah:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}\rangle^{(+)} &= |\mathbf{p}\rangle + G_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} \\
&= |\mathbf{p}\rangle + G_0^{(+)}(E_p)T|\mathbf{p}\rangle \\
&= |\mathbf{p}\rangle + \int d\mathbf{p}' G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}'\rangle\langle\mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle \\
&= |\mathbf{p}\rangle + \int d\mathbf{p}' G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}'\rangle T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \\
&= |\mathbf{p}\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}\int d\mathbf{p}' \frac{1}{E_p + i\epsilon - H_0}|\mathbf{p}'\rangle T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \\
&= |\mathbf{p}\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}\int d\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'}} T(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

  Ingat kembali, suku ke-2 Eq. (1) memberikan fungsi gelombang terhambur (*scattered outgoing wave*):

$$
A(\mathbf{p}',\mathbf{p})\frac{e^{ipr}}{r}\ ,\ (\mathbf{p}' = p\hat{\mathbf{p}}')\,, \qquad (2)
$$

  dengan

$$
A(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = -\mu(2\pi)^2 T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \qquad (3)
$$

  merupakan amplitudo hamburan.

- Anggap $|n\rangle_i$ menyatakan keadaan murni spin mula-mula (*initial pure spin state*) sistem sebelum hamburan, yang sesuai postulat ekspansi, dapat dinyatakan sebagai:

$$
|n\rangle_i = \sum_j \left(a_j^{(n)}\right)_i |\lambda_j\rangle\,, \qquad (4)
$$

  dengan $|\lambda_j\rangle = |s\lambda_j\rangle$ dan $\left(a_j^{(n)}\right)_i$ koefisien ekspansi. Dengan memasukkan spin, keadaan hamburan adalah:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}\rangle^{(+)}|n\rangle_i &= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + G_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle^{(+)}|n\rangle_i \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + G_0^{(+)}(E_p)T|\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + G_0^{(+)}(E_p)T|\mathbf{p}\rangle \sum_j \left(a_j^{(n)}\right)_i |\lambda_j\rangle \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + \sum_j G_0^{(+)}(E_p)T|\mathbf{p}\rangle|\lambda_j\rangle \left(a_j^{(n)}\right)_i \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + \sum_k \int d\mathbf{p}' \sum_j G_0^{(+)}(E_p)|\lambda_k\rangle\langle\lambda_k|\mathbf{p}'\rangle\langle\mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle|\lambda_j\rangle \left(a_j^{(n)}\right)_i \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + \sum_k \int d\mathbf{p}' \sum_j G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}'\rangle|\lambda_k\rangle\langle\lambda_k|\langle\mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle|\lambda_j\rangle \left(a_j^{(n)}\right)_i \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + \sum_k \int d\mathbf{p}' G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}'\rangle|\lambda_k\rangle \sum_j T_{kj}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \left(a_j^{(n)}\right)_i \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + +\lim_{\epsilon\to 0} \sum_k \int d\mathbf{p}' \frac{1}{E_p + i\epsilon - H_0}|\mathbf{p}'\rangle|\lambda_k\rangle \sum_j T_{kj}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \left(a_j^{(n)}\right)_i \\
&= |\mathbf{p}\rangle|n\rangle_i + +\lim_{\epsilon\to 0} \sum_k \int d\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle|\lambda_k\rangle \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p'}} \sum_j T_{kj}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \left(a_j^{(n)}\right)_i . \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Untuk singkatnya tanpa ditunjukkan secara detil, bandingkan Eq. (5) dengan Eqs. (1), (2), dan (3), kita dapatkan fungsi gelombang terhambur:

$$
\sum_k A_k(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \frac{e^{ipr}}{r} |\lambda_k\rangle \ , \ (\mathbf{p}' = p\hat{\mathbf{p}}') \, , \qquad (6)
$$

dengan amplitudo hamburan untuk tiap keadaan akhir spin $|\lambda_k\rangle$:

$$
A_k(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \sum_j M_{kj}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \left(a_j^{(n)}\right)_i = -\mu(2\pi)^2 \sum_j T_{kj}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \left(a_j^{(n)}\right)_i . \qquad (7)
$$

- Anggap peluang mendapatkan $|n\rangle_i$ dalam *initial mixed state* adalah P_n, maka *initial density matrikx* ρ_i adalah:

$$
\begin{aligned}
\rho_i &= \sum_n |n\rangle_i P_n \, {}_i\langle n| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle \sum_n \left(a_k^{(n)}\right)_i P_n \left(a_l^{(n)*}\right)_i \langle\lambda_l| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle (\rho_i)_{kl} \langle\lambda_l| \qquad (8) \\
\text{dengan } (\rho_i)_{kl} &= \sum_n \left(a_k^{(n)}\right)_i P_n \left(a_l^{(n)*}\right)_i . \qquad (9)
\end{aligned}
$$

- Anggap $|n\rangle_f$ menyatakan keadaan murni spin akhir (*final pure spin state*) sistem setelah hamburan dengan peluang P_n:

$$
|n\rangle_f = \sum_k \left(a_k^{(n)}\right)_f |\lambda_k\rangle . \qquad (10)
$$

Perbedaan keadaan akhir $|n\rangle_f$ di Eq. (10) dari keadaan awal $|n\rangle_i$ di Eq. (4) ada di koefisien ekspansi. Perubahan koefisien ekspansi dari $\left(a_j^{(n)}\right)_i$ menjadi $\left(a_k^{(n)},\right)_f$, seperti dapat dilihat dari fungsi gelombang terhambur di Eqs. (6) dan (7), ditentukan oleh matriks hamburan (*scattering matrix*) $M = -\mu(2\pi)^2 T$ sebagai berikut:

$$\left(a_k^{(n)}\right)_f = \sum_j M_{kj} \left(a_j^{(n)}\right)_i . \tag{11}$$

Perhatikan bahwa sesuai Eq. (11) $\left(a_k^{(n)}\right)_f$ bergantung pada sudut hambur $\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}$, sebagaimana M bergantung pada $\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}$. *Final density matrix* ρ_f menjadi:

$$\begin{aligned}
\rho_f &= \sum_n |n\rangle_f P_n \, {}_f\langle n| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle \sum_n \left(a_k^{(n)}\right)_f P_n \left(a_l^{(n)*}\right)_f \langle\lambda_l| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle \sum_n \sum_\alpha M_{k\alpha} \left(a_\alpha^{(n)}\right)_i P_n \sum_\beta M^*_{l\beta} \left(a_\beta^{(n)*}\right)_i \langle\lambda_l| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle \sum_{\alpha\beta} M_{k\alpha} \sum_n \left(a_\alpha^{(n)}\right)_i P_n \left(a_\beta^{(n)*}\right)_i M^*_{l\beta} \langle\lambda_l| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle \sum_{\alpha\beta} M_{k\alpha} (\rho_i)_{\alpha\beta} M^+_{\beta l} \langle\lambda_l| \\
&= \sum_{kl} |\lambda_k\rangle (\rho_f)_{kl} \langle\lambda_l| && (12) \\
\rightarrow (\rho_f)_{kl} &= \sum_{\alpha\beta} M_{k\alpha} (\rho_i)_{\alpha\beta} M^+_{\beta l} && (13) \\
&= \sum_{\alpha\beta} \langle\lambda_k|M|\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|\rho_i|\lambda_\beta\rangle\langle\lambda_\beta|M^+|\lambda_l\rangle \\
&= \langle\lambda_k|M \sum_\alpha |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|\rho_i \sum_\beta |\lambda_\beta\rangle\langle\lambda_\beta|M^+|\lambda_l\rangle \\
&= \langle\lambda_k|M\rho_i M^+|\lambda_l\rangle \\
&= \langle\lambda_k|\rho_f|\lambda_l\rangle && (14) \\
\rightarrow \rho_f &= M\rho_i M^+ . && (15)
\end{aligned}$$

- Penampang lintang differensial untuk keadaan akhir spin $|\lambda_k\rangle$ untuk kasus *pure state*:

$$\left\langle \frac{d\sigma_k}{d\Omega} \right\rangle_n = |A_k(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 = \left| \sum_j M_{kj}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \left(a_j^{(n)}\right)_i \right|^2 = \left| \left(a_k^{(n)}\right)_f \right|^2 . \tag{16}$$

- Penampang lintang differensial untuk keadaan akhir spin $|\lambda_k\rangle$ untuk kasus *mixed state*

(keadaan yang sebenarnya / riil):

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\sum_n P_n \left\langle \frac{d\sigma_k}{d\Omega} \right\rangle_n}{\sum_n P_n \langle n|n\rangle} \\
&= \frac{\sum_n P_n \left| \left(a_k^{(n)} \right)_f \right|^2}{\sum_n P_n \sum_j \left| \left(a_j^{(n)} \right)_i \right|^2} \\
&= \frac{\sum_n \left(a_k^{(n)} \right)_f P_n \left(a_k^{(n)*} \right)_f}{\sum_j \sum_n \left(a_j^{(n)} \right)_i P_n \left(a_j^{(n)*} \right)_i} \\
&= \frac{(\rho_f)_{kk}}{\sum_j (\rho_i)_{jj}} \\
&= \frac{(\rho_f)_{kk}}{\mathrm{Tr}\ (\rho_i)} \,. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

- Penampang lintang differensial untuk sembarang keadaan akhir spin $|\lambda_k\rangle$ untuk kasus *mixed state* (keadaan yang sebenarnya / riil):

$$
I = \sum_k \left(\frac{\sum_n P_n \left\langle \frac{d\sigma_k}{d\Omega} \right\rangle_n}{\sum_n P_n \langle n|n\rangle} \right) = \frac{\sum_k (\rho_f)_{kk}}{\mathrm{Tr}\ (\rho_i)} = \frac{\mathrm{Tr}\ (\rho_f)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_i)} \,. \qquad (18)
$$

2 Operator spin, *density matrix*, dan rumus umum besaran spin untuk spin $\frac{1}{2}$

- Ambillah $|n\rangle$ sebagai sembarang keadaan murni (*pure state*) spin s:

$$
|n\rangle = \sum_i a_i^{(n)} |\lambda_i\rangle \,, \qquad (19)
$$

dengan $|\lambda_i\rangle = |s\lambda_i\rangle$ dan $a_i^{(n)}$ koefisien ekspansi.

- Anggaplah suatu sistem berada dalam suatu keadaan, yang merupakan campuran keadaan murni $|n\rangle$, masing-masing dengan peluang P_n. Hasil pengukuran suatu besaran spin $\overline{\langle O\rangle}$ pada sistem tersebut adalah:

$$
\overline{\langle O\rangle} = \frac{\sum_n P_n \langle n|\hat{O}|n\rangle}{\sum_n P_n \langle n|n\rangle} = \frac{\mathrm{Tr}\ (\rho O)}{\mathrm{Tr}\ (\rho)} = \frac{\mathrm{Tr}\ (O\rho)}{\mathrm{Tr}\ (\rho)} \,, \qquad (20)
$$

dengan ρ *density matrix*:

$$
\rho = \sum_n |n\rangle P_n \langle n| = \sum_{ji} |\lambda_j\rangle \rho_{ji} \langle \lambda_i| \,, \qquad (21)
$$

dan elemen matriksnya:

$$\rho_{ji} = \langle \lambda_j | \rho | \lambda_i \rangle = \sum_n a_j^{(n)} P_n a_i^{(n)*} \,. \tag{22}$$

- Operator untuk mengukur bermacam-macam besaran spin $\hat{O}$ seperti apa? Untuk sistem dengan spin $s = \frac{1}{2}$, pilihan yang logis adalah $\hat{O} = \sigma_0$ & $\boldsymbol{\sigma}$, dengan σ_0 matriks identitas berukuran 2 x 2 dan $\boldsymbol{\sigma}$ adalah matriks Pauli:

$$\hat{O} = \{\sigma_0 \ , \ \sigma_1 \ , \ \sigma_2 \ , \ \sigma_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} . \tag{23}$$

Nilai suatu besaran spin $\overline{\langle O \rangle}$ menjadi (lihat Eq. (20)):

$$\overline{\langle O \rangle} = \overline{\langle \sigma_\alpha \rangle} = \frac{\text{Tr } (\rho \sigma_\alpha)}{\text{Tr } (\rho)} = \frac{\text{Tr } (\sigma_\alpha \rho)}{\text{Tr } (\rho)} \ , \ (\alpha = 0, 1, 2, 3) \,. \tag{24}$$

- *Density matrix* ρ seperti apa? Untuk sistem dengan spin $s = \frac{1}{2}$, pilihan yang logis adalah ρ merupakan kombinasi linier σ_0 dan $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^{3} a_\alpha \sigma_\alpha \,, \tag{25}$$

dengan a_α koefisien kombinasi linier, diperoleh dengan menerapkan *orthogonality* σ_0 & $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\text{Tr } (\sigma_\alpha \sigma_\beta) = \text{Tr } (\sigma_\beta \sigma_\alpha) = 2\delta_{\alpha\beta} \,, \tag{26}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} \text{Tr } (\sigma_\alpha \rho) = \text{Tr } (\rho \sigma_\alpha) = \sum_{\beta=0}^{3} a_\beta \text{Tr } (\sigma_\beta \sigma_\alpha) = \sum_{\beta=0}^{3} a_\beta 2\delta_{\alpha\beta} = 2a_\alpha \\ \rightarrow a_\alpha = \frac{1}{2} \text{Tr } (\sigma_\alpha \rho) = \frac{1}{2} \text{Tr } (\rho \sigma_\alpha) \,. \end{aligned} \tag{27}$$

Dengan demikian, *density matrix* ρ dapat ditulis sebagai:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{3} \sigma_\alpha \text{Tr } (\rho \sigma_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{3} \sigma_\alpha \text{Tr } (\sigma_\alpha \rho) \,. \tag{28}$$

Kemudian, dari Eq. (24) diperoleh:

$$\text{Tr } (\rho \sigma_\alpha) = \text{Tr } (\sigma_\alpha \rho) = \overline{\langle \sigma_\alpha \rangle} \text{Tr } (\rho) \,, \tag{29}$$

sehingga ρ dapat ditulis sebagai:

$$\rho = \frac{1}{2} \text{Tr } (\rho) \sum_{\alpha=0}^{3} \sigma_\alpha \overline{\langle \sigma_\alpha \rangle} \,. \tag{30}$$

- Pada eksperimen hamburan orang *set up* keadaan awal, kemudian jalankan proses hamburan, dan pada keadaan akhir orang ukur besaran-besaran spin. Terapkan Eq. (24) untuk keadaan akhir serta gunakan Eqs. (15), (18), dan (30):

$$\begin{aligned}
\overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f &= \frac{\mathrm{Tr}\ (\rho_f\sigma_\alpha)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_f)} \\
&= \frac{\mathrm{Tr}\ (M\rho_i M^+\sigma_\alpha)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_f)} \\
&= \frac{\mathrm{Tr}\ (M\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\rho_i)\sum_{\beta=0}^{3}\sigma_\beta\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i M^+\sigma_\alpha)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_f)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Tr}\ (\rho_i)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_f)}\sum_{\beta=0}^{3}\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i\mathrm{Tr}\ (M\sigma_\beta M^+\sigma_\alpha) \\
&= \frac{1}{2I}\sum_{\beta=0}^{3}\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i\mathrm{Tr}\ (M\sigma_\beta M^+\sigma_\alpha) \\
\rightarrow I\overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f &= \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{3}\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i\mathrm{Tr}\ (M\sigma_\beta M^+\sigma_\alpha)\,. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Persamaan (31) adalah rumus umum besaran spin untuk spin setengah. Rumus tersebut menghubungkan keadaan awal spin $\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i$ dan keadaan akhir spin $\overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f$. σ_β dan σ_α masing-masing adalah operator untuk mengukur spin di keadaan awal dan akhir. Faktor $\frac{1}{2}$ didapat dari jumlah keadaan yang mungkin untuk spin $s = \frac{1}{2}$, yaitu 2. Dalam $T-$matrix rumus itu dinyatakan sebagai:

$$I\overline{\langle\sigma_\alpha\rangle}_f = \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2\sum_{\beta=0}^{3}\overline{\langle\sigma_\beta\rangle}_i\mathrm{Tr}\ (T\sigma_\beta T^+\sigma_\alpha)\,. \qquad (32)$$

- Contoh, *spin-averaged differential cross section*. Pada eksperimen ini keadaan spin awal sistem acak (*unpolarized*) ($\beta = 0$, $\overline{\langle\sigma_0\rangle}_i = 1$, $\overline{\langle\sigma_{\beta\neq 0}\rangle}_i = 0$) dan pada keadaan akhir tidak dilakukan pegukuran spin ($\alpha = 0$, $\overline{\langle\sigma_0\rangle}_f = 1$):

$$I = I_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (MM^+) = \frac{1}{2}(4\pi^2\mu)^2\mathrm{Tr}\ (TT^+)\,. \qquad (33)$$

Penampang lintang di Eq. (33) adalah penampang lintang di Eq. (18), namun dibagi jumlah keadaan spin yang mungkin untuk spin $s = \frac{1}{2}$, yaitu 2:

$$I_0 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Tr}\ (\rho_f)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_i)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Tr}\ (M\rho_i M^+)}{\mathrm{Tr}\ (\rho_i)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (MM^+)\,. \qquad (34)$$

Pada Eq. (34) $\rho_i = \sigma_0$, karena keadaan spin *unpolarized*, tidak ada *preferred* spin pada arah tertentu (pada Eq. (25) $a_0 = 1$ dan $a_{\alpha\neq 0} = 0$).