Catatan Fisika Matematika 3

Materi 13

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.659 – p.665

A. Solusi transformasi Laplace

Pada pembahasan mengenai persamaan differensial biasa (lihat Boas Bab 8 Sect. 9) telah dipelajari penggunaan transformasi Laplace untuk mencari solusi persamaan differensial biasa. Melalui contoh kasus, di sini kita lihat penggunaan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial.

Bayangkan sebuah batang yang panjang sekali (*semi-infinite*). Mula-mula, temperatur di seluruh bagian batang 0 ℃. Kemudian, pada $t = 0$ ujung batang $x = 0$ dinaikan dan dijaga temnperaturnya pada 100 ℃. Dicari temperatur pada batang sebagai fungsi posisi x dan waktu t. Untuk kasus ini kita gunakan persamaan difusi berikut untuk temperatur $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,. \tag{1}$$

Ambillah $U(x,p)$ sebagai transformasi Laplace $u(x,t)$:

$$U(x,p) = L(u(x,t)) = \int_0^\infty dt\, u(x,t)e^{-pt}\,. \tag{2}$$

Transformasi Laplace $\partial u(x,t)/\partial t$ diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right) &= \int_0^\infty dt\,\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right)e^{-pt} \\ &= u(x,t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty dt\, u(x,t)e^{-pt} \\ &= -u(x,0) + pL(u(x,t)) \quad ,\ (u(x,0)=0) \\ &= pU(x,p)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Transformasi Laplace $\partial^2 u(x,t)/\partial x^2$ diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right) &= \int_0^\infty dt\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right)e^{-pt} \\ &= \int_0^\infty dt\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u(x,t)e^{-pt}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty dt\, u(x,t)e^{-pt} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(u(x,t))$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,p)\,. \tag{4}$$

Dengan demikian, transformasi Laplace persamaan differensial (1) adalah:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,p) = \frac{1}{\alpha^2} pU(x,p) \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} U(x,p) - \frac{p}{\alpha^2} U(x,p) = 0\,, \tag{5}$$

dengan solusi:

$$U(x,p) = Ae^{\sqrt{p}/\alpha x} + Be^{-\sqrt{p}/\alpha x}\,. \tag{6}$$

Selanjutnya, kita cari transformasi Laplace syarat batas, berbekal tabel transformasi Laplace (lihat Boas hlm. 469):

$$U(0,p) = L(u(0,t)) = L(100) = \frac{100}{p} \tag{7}$$

$$U(\infty,p) = L(u(\infty,t)) = L(0) = 0\,. \tag{8}$$

Dari transformasi Laplace syarat batas di Eq. (8) kita tetapkan bahwa $A = 0$ dan dari Eq. (7) $B = 100/p$, sehingga:

$$U(x,p) = \frac{100}{p} e^{-\sqrt{p}/\alpha x}\,. \tag{9}$$

Berbekal tabel transformasi Laplace, kita dapatkan $u(x,t)$ sebagai kebalikan transformasi Laplace $U(x,p)$, yaitu:

$$u(x,t) = 100\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right)\right]\,. \tag{10}$$

B. Solusi transformasi Fourier

Pada bagian ini kita lihat contoh penggunaan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial. Bayangkan sebuah lempeng logam tak berhingga. Kita atur kerangka koordinat xy sedemikian, sehingga lempeng menutupi kuadran pertama (lihat Boas Fig. 9.1 hlm. 661). Temperatur sisi lempeng dengan $x = 0$ ditahan pada 0 ℃:

$$u(0,y) = 0\,℃ \tag{11}$$

dan temperatur sisi lempeng dengan $y = 0$ dijaga sebagai berikut:

$$u(x,0) = \begin{cases} 100\,℃ & ,\ 0 < x < 1 \\ 0\,℃ & ,\ x > 1 \end{cases}\,. \tag{12}$$

Dicari temperatur lempeng sebagai fungsi x dan y. Untuk kasus ini kita gunakan persamaan Laplace 2 dimensi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0\,, \tag{13}$$

dengan solusi yang telah pernah kita dapatkan (lihat catatan materi 9 atau Boas Bab 13 Sect. 2), yaitu:

$$u(x,y) = (A\sin kx + B\cos kx)\left(Ce^{-ky} + De^{ky}\right)\,. \tag{14}$$

Sesuai syarat batas $u(0, y) = 0$, maka $B = 0$, sehingga:

$$u(x, y) = \sin kx \left(Ce^{-ky} + De^{ky}\right) . \tag{15}$$

Sesuai logika fisis $u(x, \infty) = 0$, maka $D = 0$, sehingga diperoleh fungsi basis:

$$u_k(x, y) = \sin kx \, e^{-ky} . \tag{16}$$

Solusi umum $u(x, y)$ diperoleh sebagai kombinasi linier $u_k(x, y)$ untuk semua nilai k yang mungkin:

$$u(x, y) = \int_0^\infty dk \, B(k) u_k(x, y) = \int_0^\infty dk \, B(k) \sin kx \, e^{-ky} . \tag{17}$$

Perhatikan bahwa karena k bernilai kontinyu sembarang, maka kombinasi linier bukan berupa sumasi melainkan integral. Selanjutnya, kita cari $B(k)$. Untuk $y = 0$, diperoleh:

$$u(x, 0) = \int_0^\infty dk \, B(k) \sin kx \, , \tag{18}$$

yang menunjukkan bahwa $u(x, 0)$ dan $B(k)$ merupakan pasangan transformasi Fourier sinus (lihat Boas Bab 7 Sect. 12). Sebagai kebalikan dari persamaan (18), $B(k)$ dapat diperoleh dari $u(x, 0)$ sebagai berikut:

$$B(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \, u(x, 0) \sin kx \, . \tag{19}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} B(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \, u(x, 0) \sin kx \\ &= \frac{200}{\pi} \int_0^1 dx \, \sin kx \\ &= -\frac{200}{k\pi} \cos kx|_0^1 \\ &= \frac{200}{k\pi} (1 - \cos k) \, . \end{aligned} \tag{20}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$u(x, y) = \frac{200}{\pi} \int_0^\infty dk \, \frac{1 - \cos k}{k} \sin kx \, e^{-ky} . \tag{21}$$

Bentuk persamaan (21) mengingatkan kita pada transformasi Laplace dari variabel k ke y:

$$u(x, y) = \frac{200}{\pi} L \left(\frac{1 - \cos k}{k} \sin kx \right) . \tag{22}$$

Dengan bantuan tabel transformasi Laplace, diperoleh:

$$u(x, y) = \frac{200}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{y} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x + 1}{y} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x - 1}{y} \right) \tag{23}$$

atau, dalam koordinat polar:

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{r^2 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \right) . \tag{24}$$