Catatan Fisika Matematika 3

Materi 12

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.647 – p.659

A. Temperatur bola pejal pada keadaan tunak

Sebuah bola pejal homogen memiliki radus a. Temperatur pada permukaan setengah bagian atas bola 100 ℃ dan pada permukaan setengah bagian bawah bola 0 ℃. Dicari temperatur pada seluruh bagian bola.

Persamaan untuk menyatakan temperatur pada keadaan tunak tanpa sumber kalor adalah persamaan Laplace. Sistem koordinat yang baik dipakai untuk menyelesaikan problem ini adalah sistem koordinat bola, sehingga temperatur bergantung pada r, θ, dan ϕ, yaitu $u(r,\theta,\phi)$. Kita atur sumbu koordinat sedemikian, sehingga pusat koordinat berada di pusat bola, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ berlaku untuk bagian atas bola, dan $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$ berlaku untuk bagian bawah bola. Dengan demikian, kita nyatakan syarat batas $u(a,\theta,\phi) = 100$ ℃ untuk $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ dan $u(a,\theta,\phi) = 0$ ℃ untuk $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Persamaan Laplace dalam koordinat bola adalah:

$$\nabla^2 u(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta,\phi)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}u(r,\theta,\phi)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}u(r,\theta,\phi) = 0\,. \tag{1}$$

Dikalikan dengan $r^2\sin^2\theta$, persamaan (1) menjadi:

$$\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta,\phi)\right) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}u(r,\theta,\phi)\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}u(r,\theta,\phi) = 0\,. \tag{2}$$

Kita asumsikan kebergantungan $u(r,\theta,\phi)$ pada ϕ dapat dipisahkan (teknik separasi variabel):

$$u(r,\theta,\phi) = v(r,\theta)\Phi(\phi)\,, \tag{3}$$

sehingga diperoleh (kerjakan sebagaimana biasa teknik separasi variabel):

$$\frac{1}{v(r,\theta)}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta)\right) + \frac{1}{v(r,\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}v(r,\theta)\right) + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi) = 0\,. \tag{4}$$

yang kemudian dapat disimpulkan bahwa:

$$\frac{1}{v(r,\theta)}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta)\right) + \frac{1}{v(r,\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}v(r,\theta)\right) = -\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi) = m^2 = konstan\,. \tag{5}$$

Diperoleh:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi) + m^2\Phi(\phi) = 0 \to \Phi(\phi) = A\sin m\phi + B\cos m\phi\,. \tag{6}$$

Sesuai bentuk bola, fungsi $\Phi(\phi)$ bersifat periodik dengan periode 2π, sehingga m bernilai bulat ($m = 0, 1, 2, ...$).

Selanjutnya, persamaan untuk $v(r, \theta)$ adalah:

$$\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} v(r,\theta)\right) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} v(r,\theta)\right) - m^2 v(r,\theta) = 0$$
$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} v(r,\theta)\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} v(r,\theta)\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} v(r,\theta) = 0\,, \tag{7}$$

sehingga dapat kita asumsikan (lagi, teknik separasi variabel):

$$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{8}$$

dan diperoleh:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}R(r)\right) + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta}\Theta(\theta)\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0\,. \tag{9}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}R(r)\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta}\Theta(\theta)\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = k = konstan\,. \tag{10}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}R(r)\right) - kR(r) = 0 \tag{11}$$
$$\rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta}\Theta(\theta)\right) + \left(k - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0\,. \tag{12}$$

Jika kita tuliskan $k = l(l+1)$, persamaan (12) menjadi persamaan untuk fungsi Legendre terasosiasi (*associated Legendre functions*), dengan l bilangan bulat ($l = 0, 1, 2, ...$) untuk menjamin solusi persamaan tersebut berhingga di $\theta = 0$ dan $\theta = \pi$. Dengan demikian, kita nyatakan $\Theta(\theta)$ sebagai fungsi Legendre terasosiasi:[1]

$$\Theta(\theta) = P_l^m(\cos\theta)\,. \tag{13}$$

Kemudian, dengan menyatakan $k = l(l+1)$, solusi persamaan (11) adalah r^l dan r^{-l-1}. Namun, solusi kedua tidak kita ambil karena daerah radius yang kita amati adalah $0 \leqslant r \leqslant a$ dan solusi kedua bernilai tak berhingga di $r = 0$. Dengan demikian:

$$R(r) = r^l\,. \tag{14}$$

Fungsi basis kita peroleh sebagai:

$$u_{lm}(r,\theta,\phi) = r^l P_l^m(\cos\theta)(A_{lm}\sin m\phi + B_{lm}\cos m\phi) \tag{15}$$

untuk menyatakan solusi umum:

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} u_{lm}(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} c_{lm} r^l P_l^m(\cos\theta)(A_{lm}\sin m\phi + B_{lm}\cos m\phi)\,. \tag{16}$$

[1] Hal ini tidak membuat solusi persamaan gelombang yang sedang kita kerjakan menjadi bersifat kurang umum. Ingat bahwa fungsi Legendre terasosiasi bersifat ortogonal dan lengkap, sehingga dapat dipakai sebagai basis untuk menyatakan sembarang fungsi $f(\theta,\phi)$ dalam daerah $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ dan $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$.

Khusus untuk kasus yang sedang kita amati, sesuai syarat batas yang disebutkan di awal, dapat disimpulkan bahwa temperatur bersifat simetrik di sekitar sumbu z, dengan kata lain, temperatur tidak bergantung pada sudut ϕ. Ini berarti, $m = 0$ dan fungsi basis yang berlaku adalah:

$$u_l(r,\theta,\phi) = r^l P_l(\cos\theta)\,,\ (\text{ingat } P_l^0(x) = P_l(x))\,, \tag{17}$$

dengan $P_l(\cos\theta)$ fungsi Legendre, untuk menyatakan solusi umum:

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l u_l(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta)\,. \tag{18}$$

Konstanta ekspansi c_l ditentukan sesuai syarat batas $u(a,\theta,\phi) = 100$ ℃ untuk $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ dan $u(a,\theta,\phi) = 0$ ℃ untuk $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$, dengan menerapkan ortogonalitas fungsi Legendre, yaitu:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_{l'}(x)P_l(x) = \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l}\,,\ (x = \cos\theta)\,, \tag{19}$$

didapatkan:

$$u(a,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l a^l P_l(\cos\theta) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow c_l &= \frac{2l+1}{2a^l}\int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta P_l(\cos\theta) u(a,\theta,\phi) \\ &= 50\frac{2l+1}{a^l}\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta P_l(\cos\theta)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Sekedar contoh:

$$c_0 = 50\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta P_0(\cos\theta) = 50\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta = 50 \tag{22}$$

$$c_1 = \frac{150}{a}\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta P_1(\cos\theta) = \frac{150}{a}\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta\cos\theta = \frac{75}{a}\,. \tag{23}$$

B. Persamaan Poisson

Pada bagian ini kita mencari solusi persamaan Poisson. Namun, kita melakukannya secara terbalik, yaitu berangkat dari fungsi yang telah kita kenal, dalam hal ini potensial gravitasi, kita turunkan persamaan Poisson untuk potensial gravitasi. Dari situ kita dapat tetapkam solusi umum persamaan Poisson dan kemudian terapkan pada beberapa contoh kasus.

Bayangkan sebuah massa m berada di posisi $\mathbf{r}_m$. Potensial gravitasi akibat massa m tersebut di suatu posisi $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_m$ diketahui sebagai:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Gm}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}\,,\ (G = \text{ konstanta umum gravitasi})\,. \tag{24}$$

Berhubungan dengan potensial $V(\mathbf{r})$, medan gravitasi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ diperoleh sebagai berikut:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r}) = Gm\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}\,. \tag{25}$$

Kita lihat bahwa perhitungan menjadi lebih mudah jika pusat koordinat ditaruh di posisi massa tersebut, sehingga $\mathbf{r}_m = 0$ dan diperoleh:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Gm}{r} \tag{26}$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Gm\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = Gm\hat{\mathbf{e}}_r\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{27}$$

Potensial $V(\mathbf{r})$ pada persamaan (26) memenuhi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}V(r)\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{Gm}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d(Gm)}{dr} = 0 \tag{28}$$

dan, dengan demikian, divergensi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sama dengan nol:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r}) = -\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{29}$$

Perhatikan bahwa persamaan Laplace untuk potensial (28) dan divergensi medan (29) tetap berlaku walaupun pusat koordinat ditaruh di sembarang posisi, bukan di posisi massa $\mathbf{r}_m$, karena kasus yang kita hadapi termasuk kasus dengan interaksi sentral, yaitu bergantung pada besaran skalar $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|$, sehingga tidak berubah (*invariant*) terhadap pergeseran linier (translasi) maupun pergeseran sudut (rotasi). Kita simpulkan bahwa potensial gravitasi di suatu titik $\mathbf{r}$, yang ditimbulkan oleh sebuah massa m di $\mathbf{r}_m \neq \mathbf{r}$, memenuhi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0 \tag{30}$$

dengan solusi :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Gm}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}\,. \tag{31}$$

Sekarang, bayangkan ada lebih dari satu massa m_i ($i = 1, ..., N$), masing-masing berada di posisi $\mathbf{r}_i$. Potensial gravitasi total $V(\mathbf{r})$ di suatu posisi $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$ akibat kumpulan semua massa tersebut adalah:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\mathbf{r}) = -G\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\,. \tag{32}$$

Medan gravitasi total $\mathbf{E}$ diperoleh sebagai penjumlahan vektor berikut:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\nabla}V_i(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\sum_{i=1}^{N}V_i(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r})\,. \tag{33}$$

Perhatikan pada persamaan (33) bahwa operator $\boldsymbol{\nabla}$ tidak bergantung pada $\mathbf{r}_i$, melainkan pada $\mathbf{r}$, sehingga dapat kita geser masuk ke atau keluar dari sumasi $\sum_i$. Potensial $V(\mathbf{r})$ pada persamaan (32) memenuhi persamaan Laplace dan divergensi medan $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ pada persamaan (33) sama dengan nol:

$$\nabla^2 V_i(\mathbf{r}) = 0 \to \nabla^2 V(\mathbf{r}) = \nabla^2\sum_{i=1}^{N}V_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N}\nabla^2 V_i(\mathbf{r}) = 0 \tag{34}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} V_i(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^{N} \nabla^2 V_i(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{35}$$

Kita simpulkan bahwa potensial gravitasi di suatu titik $\mathbf{r}$, yang ditimbulkan oleh sekumpulan massa m_i $(i = 1, ..., N)$, masing-masing berada di posisi $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}$, memenuhi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0 \tag{36}$$

dengan solusi :

$$V(\mathbf{r}) = -G \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}\,. \tag{37}$$

Berikut ini, sebagai ganti dari sekumpulan massa m_i $(i = 1, ..., N)$, diberikan suatu distribusi massa kontinyu di suatu daerah τ, dengan massa total M:

$$M = \int_\tau dm = \int_\tau d\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) = \int_\tau d^3r\,\rho(\mathbf{r})\,,\ (\rho(\mathbf{r}) = \text{ rapat massa})\,. \tag{38}$$

Elemen massa dm di daerah yang sempit $\mathbf{r}'$ sampai $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$ mengakibatkan potensial dan medan gravitasi di posisi $\mathbf{r}$ di luar daerah τ sebagai berikut:

$$dV(\mathbf{r}) = -\frac{G dm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{G\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{39}$$

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} dV(\mathbf{r})\,, \tag{40}$$

sehingga seluruh massa yang terdistribusi di daerah τ itu menimbulkan potensial dan medan gravitasi di posisi $\mathbf{r}$ di luar daerah τ sebesar:

$$V(\mathbf{r}) = \int_\tau dV(\mathbf{r}) = -G \int_\tau \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{41}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_\tau d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int_\tau \boldsymbol{\nabla} dV(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \int_\tau dV(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r})\,. \tag{42}$$

Potensial $dV(\mathbf{r})$ yang ditimbulkan oleh elemen massa dm memenuhi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 dV(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{43}$$

sehingga $V(\mathbf{r})$ juga memenuhi persamaan Laplace dan divergensi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sama dengan nol:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \nabla^2 \int_\tau dV(\mathbf{r}) = \int_\tau \nabla^2 dV(\mathbf{r}) = 0 \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \int_\tau d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int_\tau \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} dV(\mathbf{r}) = -\int_\tau \nabla^2 dV(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{45}$$

Kita simpulkan bahwa potensial gravitasi di suatu titik $\mathbf{r}$ di luar suatu daerah τ, yang ditimbulkan oleh suatu distribusi massa kontinyu $\rho(\mathbf{r}')$ di daerah τ, memenuhi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0 \tag{46}$$

dengan solusi :

$$V(\mathbf{r}) = -G \int_\tau \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \,. \tag{47}$$

Kini, kita lanjutkan kasus dengan distribusi massa kontinyu, namun dengan titik $\mathbf{r}$ berada di atau merupakan bagian dari daerah τ. Kita bagi daerah τ dalam 2 bagian sebagai berikut:

- daerah S adalah daerah berupa bola kecil dengan radius $a \to 0$ yang melingkupi titik $\mathbf{r}$,
- daerah τ' adalah daerah τ di luar daerah S atau daerah τ tak termasuk daerah S.

Jika $V'(\mathbf{r})$ dan $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ masing-masing adalah potensial dan medan gravitasi di titik $\mathbf{r}$, yang ditimbulkan oleh distribusi massa di daerah τ':

$$V'(\mathbf{r}) = \int_{\tau'} dV(\mathbf{r}) = -G \int_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{48}$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \int_{\tau'} d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int_{\tau'} \boldsymbol{\nabla} dV(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \int_{\tau'} dV(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V'(\mathbf{r}) \,, \tag{49}$$

maka, serupa halnya seperti persamaan (44) dan (45), untuk $V'(\mathbf{r})$ dan $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ berlaku:

$$\nabla^2 V'(\mathbf{r}) = 0 \tag{50}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}) = 0 \,. \tag{51}$$

Jika $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ adalah medan gravitasi akibat distribusi massa di daerah S, maka medan gravitasi total $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ yang ditimbulkan distribusi massa di seluruh daerah τ (daerah S plus daerah τ') adalah:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \,, \tag{52}$$

dengan divergensi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ adalah:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \,. \tag{53}$$

Kita hitung divergensi $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ dengan memanfaatkan teorema divergensi (*divergence theorem*) sebagai berikut:

$$\int_S d^3r \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = \int_S d^2r \, \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S(\mathbf{r}) \,. \tag{54}$$

Ruas kiri persamaan (54) merupakan integral untuk seluruh volume daerah S, sedangkan ruas kanan integral untuk seluruh luas permukaan daerah S, dengan $\hat{\mathbf{n}}_S(\mathbf{r})$ vektor satuan luas (ingat bahwa luas adalah vektor) di posisi $\mathbf{r}$. Dengan demikian, pada ruas kanan $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ adalah medan gravitasi di permukaan daerah S. Untuk daerah S berbentuk bola dengan radius $a \to 0$, persamaan (54) dapat dihitung secara pendekatan (*approximately*) sebagai:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \int_S d^3r &= \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S(\mathbf{r}) \int_S d^2r \\ \to \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \frac{4\pi a^3}{3} &= \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S(\mathbf{r}) 4\pi a^2 \\ \to \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \frac{a}{3} &= \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S(\mathbf{r}) \,. \end{aligned} \tag{55}$$

Medan gravitasi $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ di permukaan daerah S, yang berupa bola dengan radius $a \to 0$, mudah diperoleh (gunakan hukum Gauss), yaitu:

$$\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi a}{3} G\rho(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}}_S(\mathbf{r})\,, \tag{56}$$

sehingga dari persamaan (53), (55), dan (56) diperoleh:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \tag{57}$$

dan, mengingat $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r})$, diperoleh persamaan Poisson untuk potensial $V(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r}) = -\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \\ \to \nabla^2 V(\mathbf{r}) &= 4\pi G\rho(\mathbf{r})\,. \end{aligned} \tag{58}$$

Jadi, potensial gravitasi di tempat kosong (tak ada massa / zat) memenuhi persamaan Laplace (lihat persamaan (30), (36), (46)), sedangkan di tempat berisi massa / zat memenuhi persamaan Poisson (persamaan (58)).

Kita tengok kembali persamaan (47) dari kasus sebelum ini. Sesungguhnya, bentuk potensial $V(\mathbf{r})$ di persamaan (47) sama sekali tidak terbatas untuk titik $\mathbf{r}$ di luar daerah τ, melainkan berlaku juga untuk titik $\mathbf{r}$ di dalam daerah τ. Untuk titik $\mathbf{r}$ di dalam daerah τ ada kemungkinan $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = 0$, namun untuk rapat massa $\rho(\mathbf{r}')$ yang tidak tak berhingga integral pada persamaan (47) bernilai berhingga (tidak divergen). Untuk menunjukkan hal ini, agar mudah kita taruh pusat koordinat di titik $\mathbf{r}$, sehingga $\mathbf{r} = 0$:

$$V(0) = -G\int_\tau \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{r'} = -G\int dr'\,r'\int \sin\theta' d\theta' \int d\phi'\,\rho(r',\theta',\phi') < \infty\,. \tag{59}$$

Batas-batas integrasi pada persamaan (59) ditentukan oleh daerah τ. Dengan kata lain, bentuk $V(\mathbf{r})$ di persamaan (47) berlaku umum. Kita simpulkan bahwa potensial gravitasi di suatu titik $\mathbf{r}$ di dalam suatu daerah τ, yang ditimbulkan oleh suatu distribusi massa kontinyu $\rho(\mathbf{r}')$ di daerah τ, memenuhi persamaan Poisson:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) \tag{60}$$

dengan solusi :

$$V(\mathbf{r}) = -G\int_\tau \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{61}$$

Perhatikan bahwa persamaan Poisson dapat juga dipakai untuk menghitung kasus pertama di atas, yaitu potensial gravitasi akibat sebuah massa m yang berada di $\mathbf{r}_m$. Dalam hal ini, rapat massa dinyatakan sebagai:

$$\rho(\mathbf{r}) = m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\,, \tag{62}$$

sehingga diperoleh persamaan Poisson:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi G m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\,, \tag{63}$$

yang menjadi persamaan Laplace (30) apabila $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_m$, dengan solusi:

$$V(\mathbf{r}) = -Gm \int_\tau \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{Gm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|}\,, \tag{64}$$

sama dengan yang ditunjukkan oleh persamaan (31).

Berdasarkan perhitungan di atas, dapat kita nyatakan secara umum bahwa persamaan Poisson:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \tag{65}$$

memiliki solusi:

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,. \tag{66}$$

Dalam koordinat Cartesian dapat dinyatakan lebih detil:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x,y,z) = f(x,y,z) \tag{67}$$

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \int dx' \int dy' \int dz' \, \frac{f(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\,. \tag{68}$$

Dalam koordinat bola:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta,\phi)\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} u(r,\theta,\phi)\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u(r,\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi) \tag{69}$$

$$u(r,\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi} \int dr'\, r'^2 \int \sin\theta' d\theta' \int d\phi' \, \frac{f(r',\theta',\phi')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')]}}\,. \tag{70}$$

Terakhir, ingat kembali bahwa suatu persamaan differensial memiliki solusi khusus (*particular solution*) dan solusi pelengkap (*complementary solution*) (lihat Boas Bab 8 Sect. 6). Fungsi $u(\mathbf{r})$ pada persamaan (66) merupakan solusi khusus persamaan Poisson (65). Apabila terdapat fungsi $w(\mathbf{r})$ sebagai solusi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 w(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{71}$$

maka fungsi $w(\mathbf{r})$ merupakan solusi pelengkap persamaan Poisson (65). Dengan demikian, solusi umum persamaan Poisson (65) adalah $u(\mathbf{r}) + w(\mathbf{r})$, seperti ditunjukkan sebagai berikut:

$$\nabla^2[u(\mathbf{r}) + w(\mathbf{r})] = \nabla^2 u(\mathbf{r}) + \nabla^2 w(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\,. \tag{72}$$

Dalam kordinat bola, sebagai contoh, solusi persamaan Laplace sebagai fungsi basis $v_{lm}(r,\theta,\phi)$ diperoleh sebagai (lihat pembahasan temperatur bola pejal pada keadaan tunak di atas):

$$v_{lm}(r,\theta,\phi) = (C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-l-1}) P_l^m(\cos\theta)(A_{lm}\sin m\phi + B_{lm}\cos m\phi)\,, \tag{73}$$

sehingga diperoleh:

$$w(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} v_{lm}(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} (C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-l-1}) P_l^m(\cos\theta)(A_{lm}\sin m\phi + B_{lm}\cos m\phi)\,. \tag{74}$$

Nilai konstanta A_{lm}, B_{lm}, C_{lm}, D_{lm} ditentukan menurut syarat batas.

Contoh problem, lihat Boas Fig. 8.4 hlm. 655, sebuah muatan q berada di posisi $(0,0,a)$ (dalam koordinat Cartesian (x,y,z)). Sebuah bola dengan radius $R < a$ berada sedemikian, sehngga pusat bola berimpit dengan pusat koordinat. Bola tersebut dihubungkan dengan tanah (*ground*). Dicari potensial listrik di luar bola. Untuk kasus ini digunakan rapat muatan:

$$\rho(x,y,z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,, \tag{75}$$

sehingga diperoleh persamaan Poisson (dalam satuan Gaussian):

$$\nabla^2 V(x,y,z) = -4\pi\rho(x,y,z) = -4\pi q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,, \tag{76}$$

dengan solusi khusus (*particular solution*):

$$V_q(x,y,z) = q\int dx' \int dy' \int dz' \,\frac{\delta(x')\delta(y')\delta(z'-a)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\,, \tag{77}$$

yang dalam koordinat bola dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} V_q(r,\theta,\phi) &= \frac{q}{\sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + (r\cos\theta - a)^2}} \\ &= \frac{q}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + a^2 - 2ra\cos\theta}} \\ &= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}}\,. \end{aligned} \tag{78}$$

Karena tidak bergantung pada ϕ, untuk selanjutnya $V_q(r,\theta,\phi)$ ditulis sebagai $V_q(r,\theta)$. Solusi pelengkap (*complementary solution*) $V_c(r,\theta,\phi)$ secara umum diperoleh sebagai (lihat persamaan (74)):

$$V_c(r,\theta,\phi) = \sum_{lm}(C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-l-1})P_l^m(\cos\theta)(A_{lm}\sin m\phi + B_{lm}\cos m\phi)\,. \tag{79}$$

Sesuai syarat atau logika fisis, potensial listrik tidak bernilai tak berhingga untuk r besar, dengan demikian, $C_{lm} = 0$. Potensial listrik juga tidak bergantung pada ϕ atau bersifat invarian terhadap rotasi di sekitar sumbu z, dengan demikian, $m = 0$, $P_l^m = P_l$, dan $V_c(r,\theta,\phi)$ ditulis sebagai $V_c(r,\theta)$. Jadi, diperoleh:

$$V_c(r,\theta) = \sum_l c_l r^{-l-1}P_l(\cos\theta)\,. \tag{80}$$

Dengan demikian, potensial listrik $V(r,\theta)$ didapatkan sebagai:

$$V(r,\theta) = V_q(r,\theta) + V_c(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} + \sum_l c_l r^{-l-1}P_l(\cos\theta)\,. \tag{81}$$

Mengingat bola dihubungkan ke tanah, berarti potensial di permukaan bola nol dan ini menjadi syarat batas $V(R,\theta) = 0$. Dengan syarat batas ini kita dapat menentukan koefisien ekspansi c_l:

$$V(R,\theta) = \frac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}} + \sum_l c_l R^{-l-1}P_l(\cos\theta) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\to \frac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}} = -\sum_l c_l R^{-l-1} P_l(\cos\theta) \\
&\to \frac{q}{a}\frac{1}{\sqrt{(R/a)^2+1-2(R/a)\cos\theta}} = -\sum_l c_l R^{-l-1} P_l(\cos\theta) \\
&\to \frac{q}{a}\frac{1}{\sqrt{(R/a)^2+1-2(R/a)\cos\theta}} = \frac{q}{a}\sum_l (R/a)^l P_l(\cos\theta)\,, \ \text{(ingat fungsi pembangkit } P_l(\cos\theta)) \\
&\to c_l = -\frac{qR^{2l+1}}{a^{l+1}}\,. \qquad (82)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh potensial listrik $V(r,\theta)$ (ingat fungsi pembangkit $P_l(\cos\theta)$):

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - q\sum_l \frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}} r^{-l-1} P_l(\cos\theta) \\
&= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - q\frac{R}{ra}\sum_l \left(\frac{R^2}{ra}\right)^l P_l(\cos\theta) \\
&= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - q\frac{R}{ra}\frac{1}{\sqrt{1+(R^2/(ra))^2-2(R^2/(ra))\cos\theta}} \\
&= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - \frac{qR/a}{\sqrt{r^2+(R^2/a)^2-2r(R^2/a)\cos\theta}}\,. \qquad (83)
\end{aligned}
$$

C. Fungsi Green

Pada pembahasan mengenai persamaan differensial biasa (lihat Boas Bab 8 Sect. 12) telah dipelajari penggunaan fungsi Green untuk mencari solusi persaman differensial biasa. Dengan prinsip yang sama, di sini kita gunakan juga fungsi Green untuk mencari solusi persamaan Poisson. Fungsi Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ memenuhi persamaan Poisson sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (84) \\
&= \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\,, \ \text{(dalam koordinat Cartesian)} \qquad (85) \\
&= \frac{\delta(r-r')}{r^2}\frac{\delta(\theta-\theta')}{\sin\theta}\delta(\phi-\phi')\,, \ \text{(dalam koordinat bola)}\,. \qquad (86)
\end{aligned}
$$

Bandingkan persamaan (84) dengan, misalkan, persamaan (63) dan (76), sehingga ruas kanan persamaan (84) dapat kita anggap sebanding dengan rapat massa atau rapat muatan untuk menyatakan massa atau muatan titik. Dengan demikian, kita dapat anggap bahwa fungsi Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sebanding dengan potensial yang ditimbulkan oleh sebuah massa atau muatan titik.

Fungsi delta Dirac $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ bersifat sebagai berikut:

$$
\int d\mathbf{r}'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r})\,. \qquad (87)
$$

Kita terapkan sifat fungsi delta Dirac tersebut dan persamaan (84) pada persamaan Poisson:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) \\
&= \int d\mathbf{r}'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{r}' \nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \\
&= \nabla^2 \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\,,\ (\nabla \,\text{bergantung pada}\, \mathbf{r}\,,\ \text{bukan}\, \mathbf{r}')\,,
\end{aligned} \tag{88}
$$

kita dapatkan bahwa solusi persamaan Poisson dapat dinyatakan dalam fungsi Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sebagai:

$$
u(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\,. \tag{89}
$$

Kita bandingkan persamaan (89) dengan persamaan (66), diperoleh:

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
\to G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,.
\end{aligned} \tag{90}
$$

Mengingat solusi persamaan Poisson memiliki juga solusi pelengkap, yang merupakan solusi persamaan Laplace, maka pada fungsi Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ kita tambahkan suatu fungsi $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sesuai syarat-syarat batas yang berlaku, sehingga apabila fungsi Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ dimasukkan ke persamaan (89) memberikan suku kedua sebagai solusi pelengkap yang sesuai:

$$
G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{91}
$$

$$
\to u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d\mathbf{r}' F(\mathbf{r},\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\,. \tag{92}
$$

Contoh, untuk kasus terakhir yang memberikan poensial listrik $V(r,\theta)$ di persamaan (83), fungsi Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ diperoleh sebagai berikut:

$$
G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{R/r'}{4\pi|\mathbf{r}-R^2\mathbf{r}'/r'^2|}\,. \tag{93}
$$