Catatan Fisika Matematika 3

Materi 11

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.638 – p.647

Pada pembahasan sebelum ini, meskipun benda yang kita amati berwujud tiga dimensi, namun sifat fisisnya secara spasial bervariasi hanya pada satu dimensi, dengan kata lain, ditentukan oleh satu variabel bebas. Kini, kita amati proses yang lebih kompleks, yang secara spasial dideskripsikan oleh lebih dari satu variabel bebas.

A. Temperatur silinder pejal pada keadaan tunak

Sebuah silinder pejal homogen yang sangat panjang (*semi infinite*) memiliki radius a. Temperatur pada kulit silinder 0 ℃ dan pada permukaan salah satu ujungnya (dasar silinder) 100 ℃. Dicari temperatur pada seluruh bagian silinder.

Persamaan untuk menyatakan temperatur pada keadaan tunak tanpa sumber kalor adalah persamaan Laplace. Sistem koordinat yang baik dipakai untuk menyelesaikan problem ini adalah sistem koordinat silinder, sehingga temperatur bergantung pada r, θ, dan z, yaitu $u(r,\theta,z)$. Kita atur sumbu koordinat sedemikian, sehingga sumbu z berimpit dengan sumbu silinder, dengan dasar silinder bertemperatur 100 ℃ berada di $z = 0$. Dengan demikian, kita nyatakan dua syarat batas $u(r,\theta,0) = 100$ ℃ dan $u(a,\theta,z) = 0$ ℃.

Persamaan Laplace dalam koordinat silinder adalah:

$$\nabla^2 u(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta,z)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(r,\theta,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u(r,\theta,z) = 0\,. \tag{1}$$

Melihat persamaan (1), khususnya suku ketiga, kita asumsikan kebergantungan $u(r,\theta,z)$ pada z dapat dipisahkan (teknik separasi variabel):

$$u(r,\theta,z) = v(r,\theta)Z(z)\,. \tag{2}$$

Setelah $u(r,\theta,z)$ di persamaan (2) dimasukkan ke persamaan (1) (kerjakan sebagaimana biasa teknik separasi variabel), diperoleh:

$$\frac{1}{v(r,\theta)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta)\right) + \frac{1}{v(r,\theta)}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v(r,\theta) + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2}{dz^2}Z(z) = 0\,, \tag{3}$$

yang kemudian dapat disimpulkan bahwa:

$$\frac{1}{v(r,\theta)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta)\right) + \frac{1}{v(r,\theta)}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v(r,\theta) = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2}{dz^2}Z(z) = -K^2 = konstan\,. \tag{4}$$

Diperoleh:

$$\frac{d^2}{dz^2}Z(z) - K^2 Z(z) = 0 \rightarrow Z(z) = Ae^{-Kz} + Be^{Kz}\,. \tag{5}$$

Menurut logika fisis untuk kasus ini, temperatur menuju nol sejalan dengan bertambahnya nilai z. Suku e^{Kz} tidak sesuai dengan logika fisis tersebut, karena justru bernilai membesar sejalan dengan bertambahnya nilai z. Dengan demikian, dinyatakan:

$$Z(z) = e^{-Kz}\,. \tag{6}$$

Selanjutnya, persamaan untuk $v(r,\theta)$ adalah:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v(r,\theta) + K^2 v(r,\theta) = 0\,. \tag{7}$$

Jika persamaan (7) dikalikan r^2, diperoleh:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta)\right) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v(r,\theta) + K^2 r^2 v(r,\theta) = 0\,, \tag{8}$$

sehingga dapat kita asumsikan (lagi, teknik separasi variabel):

$$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{9}$$

dan diperoleh:

$$\frac{1}{R(r)}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) + K^2 r^2 = 0\,, \tag{10}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R(r)}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) + K^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = n^2 = konstan\,. \tag{11}$$

Diperoleh:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \rightarrow \Theta(\theta) = A\sin n\theta + B\cos n\theta\,. \tag{12}$$

Sesuai wujud silinder, untuk m bernilai bulat (r,θ,z) dan $(r,\theta + m2\pi, z)$ menunjukkan posisi yang sama, sehingga berlaku $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + m2\pi)$. Dengan demikian:

$$\begin{aligned}
\Theta(\theta + m2\pi) &= A\sin(n\theta + nm2\pi) + B\cos(n\theta + nm2\pi) \\
&= A\sin n\theta + B\cos n\theta \\
\rightarrow nm &= \text{bilangan bulat} \\
\rightarrow n &= \text{bilangan bulat}\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Mengingat silinder homogen dan bahwa pada dasar silinder berlaku $u(r,\theta,0) = 100$ ℃ (tak bergantung pada arah atau sudut θ), maka logika fisis menyatakan bahwa temperatur bersifat simetrik di sekitar sumbu silinder, dengan demikian tidak bergantung pada θ. Ini berarti $n = 0$ dan:

$$\Theta(\theta) = B = konstan\,. \tag{14}$$

Supaya mudah, di sini kita dapat nyatakan $B = 1$. (Pada saatnya nanti, syarat batas akan menentukan nilai-nilai konstanta yang ada.)

Persamaan untuk $R(r)$ adalah:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right)+\left(K^2r^2-n^2\right)R(r)=0\,, \tag{15}$$

yang merupakan persamaan Bessel. Dengan demikian:

$$R(r)=AJ_n(Kr)+BN_n(Kr)\,. \tag{16}$$

Namun, fungsi Bessel $N_n(Kr)$ bernilai tak berhingga untuk $r=0$, sehingga tidak dapat kita sertakan. Mengingat $n=0$, dengan demikian:

$$R(r)=J_0(Kr)\,. \tag{17}$$

Sesuai syarat batas $u(a,\theta,z)=0$ ℃, $R(a)=J_0(Ka)=0=J_0(k_m)$, dengan k_m $(m=1,2,3,...)$ adalah titik-titik nol (*zeros*) fungsi Bessel J_0. Dengan demikian:

$$R(r)=J_0(k_mr/a)\,. \tag{18}$$

Kita dapatkan fungsi basis $u_m(r,\theta,z)$:

$$u_m(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)=J_0(k_mr/a)e^{-k_mz/a} \tag{19}$$

untuk menyatakan solusi umum $u(r,\theta,z)$ sbagai:

$$u(r,\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}c_mu_m(r,\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}c_mJ_0(k_mr/a)e^{-k_mz/a}\,. \tag{20}$$

Konstanta ekspansi c_m ditentukan sesuai syarat batas $u(r,\theta,0)=100$ ℃, dengan menerapkan ortogonalitas fungsi Bessel:

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,0)=100=&\sum_{m=1}^{\infty}c_mJ_0(k_mr/a) &\quad(21)\\
\rightarrow c_m\frac{a^2}{2}J_1^2(k_m)=&\int_0^a dr\,r\,J_0(k_mr/a)u(r,\theta,0)\\
&=100\int_0^a dr\,r\,J_0(k_mr/a)\\
&=100\frac{a^2}{k_m^2}\int_0^{k_m}d\left(\frac{k_mr}{a}\right)\frac{k_mr}{a}J_0(k_mr/a)\\
&=100\frac{a^2}{k_m^2}\int_0^{k_m}d\left(\frac{k_mr}{a}\right)\frac{d}{d(k_mr/a)}\left[\frac{k_mr}{a}J_1(k_mr/a)\right]\\
&=100\frac{a^2}{k_m^2}\left[\frac{k_mr}{a}J_1(k_mr/a)\right]_0^a\,,\ \left(\text{ingat: }\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)\right)\\
&=100\frac{a^2}{k_m}J_1(k_m)\\
\rightarrow c_m=&\frac{200}{k_mJ_1(k_m)}\,. &\quad(22)
\end{aligned}$$

Dengan demikian:

$$u(r,\theta,z) = 200\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k_m J_1(k_m)}J_0(k_m r/a)e^{-k_m z/a}\,. \tag{23}$$

Kasus lain. Anggap tenperatur pada dasar silinder $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$, maka:

$$\Theta(\theta) = A\sin n\theta + B\cos n\theta\,,\ (n = 0, 1, 2, ...) \tag{24}$$

$$R(r) = J_n(k_{mn}r/a)\,,\ (k_{mn} = \text{ zeros } J_n\,,\ m = 1, 2, 3, ...)\,. \tag{25}$$

Kita peroleh fungsi basis $u_{mn}(r,\theta,z)$:

$$u_{mn}(r,\theta,z) = J_n(k_{mn}r/a)(A_{mn}\sin n\theta + B_{mn}\cos n\theta)e^{-k_{mn}z/a} \tag{26}$$

untuk menyatakan solusi umum $u(r,\theta,z)$ sebagai:

$$u(r,\theta,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{mn}(r,\theta,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_n(k_{mn}r/a)(A_{mn}\sin n\theta + B_{mn}\cos n\theta)e^{-k_{mn}z/a}\,. \tag{27}$$

Konstanta ekspansi A_{mn} dan B_{mn} diperoleh sesuai syarat batas $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$, dengan menerapkan ortogonalitas fungsi sinus, fungsi cosinus, dan fungsi Bessel:

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,0) = f(r,\theta) = &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_n(k_{mn}r/a)(A_{mn}\sin n\theta + B_{mn}\cos n\theta)\\
\to A_{mn} = &\frac{2}{\pi a^2 J_{n+1}^2(k_{mn})}\int_0^a dr\int_0^{2\pi}d\theta\, r J_n(k_{mn}r/a)\sin n\theta f(r,\theta) &(28)\\
\to B_{mn} = &\frac{2}{\pi a^2 J_{n+1}^2(k_{mn})}\int_0^a dr\int_0^{2\pi}d\theta\, r J_n(k_{mn}r/a)\cos n\theta f(r,\theta)\,. &(29)
\end{aligned}$$

B. Vibrasi membran dengan tepi berbentuk lingkaran

Contoh membran dengan tepi berbentuk lingkaran adalah membran pada gendang, bedug, drum. Membran tersebut direntangkan dan dijepit tepinya pada rangka pejal. Apabila membran itu diusik (ditepuk, dipukul), timbul gelombang berdiri pada membran, sehingga membran bervibrasi pada frekuensi karakteristiknya. Kita cari frekuensi karateristik dan mode normal vibrasi membran tersebut.

Untuk mendeskripsikan vibrasi membran tersebut kita ambil persamaan gelombang. Sistem koordinat yang baik dipakai untuk kasus ini adalah sistem koordinat polar. Kita atur sumbu koordinat sedemikian, sehingga pusat koordinat ada di pusat membran dan permukaan membran menjadi bidang $r\theta$. Vibrasi terjadi sejajar sumbu z, tegak lurus permukaan membran, sehingga fungsi gelombang pada membran adalah $z(r,\theta,t)$. Anggap radius membran a, sehingga berlaku syarat batas $z(a,\theta,t) = 0$.

Persamaan gelombang dalam koordinat polar adalah:

$$\nabla^2 z(r,\theta,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}z(r,\theta,t)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}z(r,\theta,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}z(r,\theta,t)\,, \tag{30}$$

dengan v cepat rambat gelombang. Fungsi gelombang $z(r,\theta,t)$ dapat dinyatakan sebagai (teknik separasi variabel):

$$z(r,\theta,t) = F(r,\theta)T(t)\,, \tag{31}$$

sehingga diperoleh (sesuai teknik separasi variabel):

$$\frac{1}{F(r,\theta)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}F(r,\theta)\right) + \frac{1}{F(r,\theta)}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}F(r,\theta) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = -K^2 = konstan\,, \tag{32}$$

$$\to \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}F(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}F(r,\theta) + K^2F(r,\theta) = 0 \tag{33}$$

$$\to \frac{d^2}{dt^2}T(t) + (Kv)^2T(t) = 0\,. \tag{34}$$

Diperoleh:

$$T(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t\,,\ (Kv = \omega)\,. \tag{35}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (33), kita terapkan lagi teknik separasi variabel:

$$F(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{36}$$

$$\to \frac{1}{R(r)}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) + K^2r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = n^2 = konstan$$

$$\to r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) + (K^2r^2 - n^2)R(r) = 0 \tag{37}$$

$$\to \frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0\,. \tag{38}$$

Diperoleh:

$$R(r) = J_n(Kr) \quad \text{dan} \quad \Theta(\theta) = C\sin n\theta + D\cos n\theta \tag{39}$$

Karena $\Theta(\theta)$ bersifat periodik dengan periode 2π, n harus bernilai bulat ($n = 0, 1, 2, ...$). Sesuai syarat batas $z(a,\theta,t) = 0$, $R(a) = J_n(Ka) = 0 = J_n(k_{mn})$, dengan k_{mn} ($m = 1, 2, 3, ...$) adalah titik-titik nol (*zeros*) fungsi Bessel J_n. Dengan demikian, diperoleh basis, yang menyatakan mode normal vibrasi membran:

$$z_{mn}(r,\theta,t) = J_n(k_{mn}r/a)(C_{mn}\sin n\theta + D_{mn}\cos n\theta)\left(A_{mn}\sin\frac{k_{mn}vt}{a} + B_{mn}\cos\frac{k_{mn}vt}{a}\right)\,. \tag{40}$$

Frekuensi karakteristik vibrasi membran diperoleh sebagai:

$$\nu_{mn} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k_{mn}v}{2\pi a}\,. \tag{41}$$