Catatan Fisika Matematika 3

Materi 10

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.628 – p.638

A. Persamaan difusi atau persamaan aliran kalor

Pada peristiwa perambatan atau aliran kalor melalui suatu bahan akibat perbedaan temperatur tanpa keberadaan sumber panas berlaku persamaan aliran kalor:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{r},t)\,, \tag{1}$$

dengan $u(\mathbf{r},t)$ temperatur pada bahan di posisi $\mathbf{r}$ pada waktu t dan α konstanta yang bergantung pada sifat bahan. Kita lihat masing-masing suku pada persamaan (1), tidak termasuk $u(\mathbf{r},t)$, bergantung hanya pada variabel $\mathbf{r}$ atau variabel t, dengan demikian, kita dapat lakukan separasi variabel. Kita nyatakan $u(\mathbf{r},t)$ sebagai:

$$u(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r})T(t) \tag{2}$$

dan masukkan ke persamaan (1), kemudian setelah dibagi dengan $F(\mathbf{r})T(t)$ diperoleh:

$$\frac{1}{F(\mathbf{r})}\nabla^2 F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\alpha^2 T(t)}\frac{d}{dt}T(t)\,. \tag{3}$$

Ruas kiri persamaan (3) tetap apabila $\mathbf{r}$ meskipun t berubah, sehingga ruas kanan juga tetap. Begitupun sebaliknya, ruas kanan persamaan (3) tetap apabila t tetap meskipun $\mathbf{r}$ berubah, sehingga ruas kiri juga tetap. Dengan demikian:

$$\frac{1}{F(\mathbf{r})}\nabla^2 F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\alpha^2 T(t)}\frac{d}{dt}T(t) = -k^2 = konstan \tag{4}$$

$$\to \nabla^2 F(\mathbf{r}) + k^2 F(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dt}T(t) + k^2\alpha^2 T(t) = 0\,. \tag{5}$$

Komponen temporal $T(t)$ dapat diperoleh dengan mudah, yaitu:[1]

$$T(t) = e^{-k^2\alpha^2 t}\,. \tag{6}$$

[1] Ada dua catatan:

1. Jika pada persamaan (4) nilai konstan yang diberikan adalah $+k^2$, diperoleh $T(t) = e^{k^2\alpha^2 t}$, yang bernilai tak berhingga pada waktu yang lama ($t \to \infty$) dan itu tidak mungkin (tidak fisis bahwa temperatur pada bahan itu menjadi tak berhingga). Karena itu, diberikan $-k^2$.
2. Kita tidak perlu memberikan konstanta integrasi, sebut saja A, sehingga $T(t) = Ae^{-k^2\alpha^2 t}$, karena konstanta-konstanta integrasi akan ditentukan secara bersama kemudian menurut syarat batas untuk $u(\mathbf{r},t)$. Atau, anggap saja konstanta integrasi A "dimasukkan" ke dalam fungsi $F(\mathbf{r})$, yang masih akan dicari. Pada tahap ini yang ingin diperoleh adalah bentuk fungsi yang menyatakan kebergantungan proses pada waktu t dan diperoleh $e^{-k^2\alpha^2 t}$.

Berikutnya, sebagai contoh, fungsi $F(\mathbf{r})$ dan juga $u(\mathbf{r}, t)$ kita cari pada proses aliran kalor melalui sebuah dinding, dengan beberapa kasus berbeda. Bayangkan suatu dinding dengan tebal l. Akibat perbedaan temperatur, kalor mengalir melalui dinding itu dari salah satu sisi ke sisi yang lain. Kita atur bidang yz berimpit dengan salah satu permukaan dinding, sehingga salah satu sisi dinding pada $x = 0$ dan sisi lainnya pada $x = l$. Anggap kalor mengalir secara efektif sejajar sumbu x dan permukaan dinding sangat luas, sehingga tidak perlu memperhitungkan situasi khusus pada tepi dinding. Secara spasial, kasus ini merupakan kasus 1 dimensi, yaitu dalam variabel x. Dengan demikian, $F(\mathbf{r})$ menjadi $F(x)$, $u(\mathbf{r}, t)$ menjadi $u(x, t)$, dan persamaan aliran kalor menjadi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) . \tag{7}$$

1. Kasus pertama, keadaan tunak. Pada keadaan tunak, kalor mengalir secara tetap melalui dinding dan tidak ada perubahan temperatur terhadap waktu, $u(x, t)$ menjadi $u_1(x)$. Pada kasus ini, temperatur memenuhi persamaan Laplace satu dimensi dalam variabel x:

$$\frac{d^2}{dx^2} u_1(x) = 0 \tag{8}$$

dan diperoleh distribusi linier temperatur di sepanjang sumbu x:

$$\frac{d}{dx} u_1(x) = a \tag{9}$$

$$\rightarrow u_1(x) = ax + b , \tag{10}$$

dengan a dan b ditentukan sesuai syarat batas. Apabila temperatur sisi dinding $x = 0$ dan sisi dinding $x = l$ berturut-turut adalah 0 ℃ dan 100 ℃, diperoleh $b = 0$ dan $a = 100/l$ ℃, sehingga:

$$u_1(x) = \frac{100}{l} x \text{ ℃} . \tag{11}$$

Secara umum, pada keadaan tunak terdapat distribusi linier temperatur di sepanjang sumbu x, sesuai nilai-nilai temperatur di kedua sisi dinding.

2. Bermula dengan keadaan tunak pada kasus nomor 1 di atas, kemudian temperatur sisi $x = l$ dinding berubah menjadi 0 ℃ dan untuk seterusnya temperatur di kedua sisi dinding tetap 0 ℃. Dicari temperatur bagian dinding di setiap posisi x pada waktu kemudian t, yaitu $u_2(x, t)$. Kita dapatkan di sini tiga syarat batas, yaitu $u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0$, $u_2(x, 0) = u_1(x) = 100x/l$ ℃. Tiga syarat batas ini cukup untuk mendapatkan solusi unik $u_2(x, t)$, karena persamaan (7) merupakan persamaan differensial orde 2 dalam x dan orde 1 dalam t. Kebergantungan temperatur pada waktu t sudah kita dapatkan di persamaan (6). Kini kita cari $F(x)$, yang memenuhi persamaan Helmholtz:

$$\frac{d^2}{dx^2} F(x) + k^2 F(x) = 0 . \tag{12}$$

Diperoleh:

$$F(x) = A \sin kx + B \cos kx . \tag{13}$$

Sesuai syarat batas $u_2(0,t)=0$, yang berarti $F(0)=0$, maka $B=0$, sehingga:

$$F(x) = A\sin kx\,. \tag{14}$$

Sesuai syarat batas $u_2(l,t)=0$, yang berarti $F(l)=0$, maka diperoleh nilai k_n sebagai berikut:

$$\sin k_n l = 0 \to k_n = \frac{n\pi}{l}\,,\ (n=1,2,3,...)\,. \tag{15}$$

Perhatikan bahwa $n=0$ tidak diperhitungkan, karena apabila $n=0$, maka $F(x)=0$ dan begitu pula $u_2(x,t)=0$ pada x dan t berapapun, dan ini tidak mungkin, mengingat keadaan awal temperatur $u_2(x,0)=100x/l$ ℃. Jadi, diperoleh $u_n(x,t)$ sebagai berikut:

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2t}\,, \tag{16}$$

yang menjadi basis untuk solusi umum $u_2(x,t)$:

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2t}\,. \tag{17}$$

Nilai koefisien ekspansi b_n ditentukan dengan menerapkan syarat batas ketiga, yaitu $u_2(x,0)=100x/l$ ℃, sebagai berikut:

$$u_2(x,0) = \frac{100}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\to b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\ \sin\frac{n\pi x}{l}u_2(x,0)\\
&= \frac{200}{l^2}\int_0^l dx\ \sin\frac{n\pi x}{l}x\\
&= \frac{200}{l^2}\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}x\bigg|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l dx\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right)\\
&= \frac{200}{l^2}\left(-\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi\right)\\
&= -\frac{200}{n\pi}(-1)^n\\
&= \frac{200}{n\pi}(-1)^{n-1}\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$u_2(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2t}\,. \tag{20}$$

Sesuai persamaan (20), setelah waktu yang lama temperatur di semua bagian dinding dari $x=0$ sampai $x=l$ adalah sama, yaitu nol, dan tidak ada aliran kalor melalui dinding:

$$\lim_{t\to\infty} u_2(x,t) = 0\,. \tag{21}$$

Jadi, dari keadaan tunak dengan temperatur linier $u_1(x)$, sistem berakhir ke keadaan tunak, namun dengan temperatur berbeda, yaitu 0.

3. Pada kasus nomor 2, keadaan akhir sistem adalah keadaan tunak yang ditentukan oleh temperatur tetap di kedua sisi dinding, yang nilainya sama, yaitu 0, sehingga temperatur setiap bagian dinding di sepanjang sumbu x pun sama, yaitu 0. Apabila diberikan temperatur tetap di kedua sisi dinding yang berbeda nilai, misalkan u_0 di $x = 0$ dan u_l di $x = l$, maka keadaan akhir sistem adalah keadaan tunak dengan distribusi linier temperatur di sepanjang sumbu x dari nilai temperatur u_0 sampai u_l:

$$\lim_{t\to\infty} u_3(x,t) = \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0\,. \tag{22}$$

Temperatur di sepanjang sumbu x dari waktu ke waktu, $u_3(x,t)$, dapat dicari dengan cara serupa seperti pada kasus nomor 2, dengan syarat batas $u_3(0,t) = u_0$, $u_3(l,t) = u_l$, $u_3(x,0) = u_1(x) = 100x/l$ ℃. Namun, kita dapat juga memperolehnya dengan cara yang lebih sederhana.

(a) Komponen spasial persamaan (7) hanya berisi suku differensial orde 2 terhadap x. Dengan demikian, jika $u_2(x,t)$ pada persamaan (17) (nilai koefisien b_n masih sembarang, belum ditentukan) memenuhi persamaan aliran kalor (7):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u_2(x,t)\,, \tag{23}$$

maka tambahan suatu fungsi linier $rx+s$ pada $u_2(x,t)$ tersebut tidak mengubah persamaan (23):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u_2(x,t) + rx + s\right] &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[u_2(x,t) + rx + s\right] \\
\to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(rx+s) &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u_2(x,t) + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}(rx+s) \\
\to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t) + 0 &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u_2(x,t) + 0 \\
\to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t) &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u_2(x,t)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

(b) Kita sudah tahu bahwa:

$$\lim_{t\to\infty} u_2(x,t) = \lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} = 0\,, \tag{25}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} + \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0\right] &= \lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \\
&\quad + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{u_l - u_0}{l}x + u_0\right) \\
&= \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0 \\
&= \lim_{t\to\infty} u_3(x,t)\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

Dengan demikian, kita dapat nyatakan $u_3(x,t)$ sebagai berikut:

$$u_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} + \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0\,. \tag{27}$$

Nilai koefisien ekspansi b_n diperoleh sebagai berikut:

$$u_3(x,0) = \frac{100}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0 \tag{28}$$

$$\rightarrow u_3(x,0) - \frac{u_l - u_0}{l}x - u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\,\sin\frac{n\pi x}{l}\left[u_3(x,0) - \frac{u_l - u_0}{l}x - u_0\right] \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l dx\,\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{100}{l}x - \frac{u_l - u_0}{l}x - u_0\right) \\
&= \frac{2(100 - u_l + u_0)}{l^2}\int_0^l dx\,\sin\frac{n\pi x}{l}x - \frac{2u_0}{l}\int_0^l dx\,\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{2(100 - u_l + u_0)}{n\pi}(-1)^{n-1} + \frac{2u_0}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) \\
&= \frac{2(100 - u_l + u_0)}{n\pi}(-1)^{n-1} + \frac{2u_0}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \\
&= \frac{2(100 - u_l + u_0)}{n\pi}(-1)^{n-1} - \frac{2u_0}{n\pi}\left[(-1)^{n-1} + 1\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[(100 - u_l)(-1)^{n-1} - u_0\right]\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$u_3(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(100 - u_l)(-1)^{n-1} - u_0\right]\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} + \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0\,. \tag{31}$$

4. Sebagai syarat batas tidak selalu diberikan nilai u, melainkan dapat juga nilai turunan pertama u, dalam hal ini $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$. Misalkan, diberikan syarat batas:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=l} = 0\,, \tag{32}$$

yang berarti bahwa kedua sisi dinding terisolasi termal, tidak ada aliran kalor keluar maupun masuk menembus sisi-sisi dinding. Untuk menerapkan syarat batas tersebut, setelah diperoleh solusi umum fungsi $F(x)$ di persamaan (13), kita turunkan fungsi $F(x)$ tersebut:

$$\frac{d}{dx}F(x) = kA\cos kx - kB\sin kx\,. \tag{33}$$

Sesuai syarat batas di persamaan (32), diperoleh $A = 0$ dan:

$$k = 0 \quad \text{atau} \quad \sin kl = 0 \rightarrow k = \frac{n\pi}{l}\,,\ (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{34}$$

Berbeda dari persamaan (15), di sini $n = 0$ juga diperhitungkan untuk memberikan nilai $k = 0$. Dengan demikian, diperoleh fungsi basis $u_n(x,t)$:

$$u_n(x,t) = \cos\frac{n\pi x}{l}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \tag{35}$$

dan solusi umum $u_4(x,t)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$u_4(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\,, \tag{36}$$

yang merupakan deret Fourier kosinus. Misalkan, mula-mula temperatur sama dengan x ℃, ini menjadi syarat batas ketiga, yaitu $u_4(x,0) = x$ ℃:

$$u_4(x,0) = x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{37}$$

Diperoleh koefisien ekspansi a_n:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_0^l dx\, u_4(x,0) \\
&= \frac{1}{l}\int_0^l dx\, x \\
&= \frac{l}{2}
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \cos\frac{n\pi x}{l} u_4(x,0)\,,\ (n>0) \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \cos\frac{n\pi x}{l} x \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l} x\Big|_0^l - \frac{2}{n\pi}\int_0^l dx\, \sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] \\
&= -\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n-1} + 1\right] \\
&= -\frac{4l}{n^2\pi^2}\,,\ (n = \text{ganjil})
\end{aligned} \tag{39}$$

dan temperatur $u_4(x,t)$:

$$u_4(x,t) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\,. \tag{40}$$

B. Persamaan Schrödinger

Persamaan Schrödinger diberikan sebagai berikut (disebut juga sebagai persamaan Schrödinger bergantung waktu):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t)\,. \tag{41}$$

Apabila energi potensial (seringkali orang sebut singkat hanya "potensial", tanpa kata "energi") tidak bergantung secara eksplisit pada waktu, persamaan Schrödinger menjadi:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t) \tag{42}$$

dan, seperti persamaan difusi atau persamaan aliran kalor, kita dapat lakukan separasi variabel:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})T(t) \tag{43}$$

dan diperoleh:

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(\mathbf{r})}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) = E = konstan\,. \tag{44}$$

Pada persamaan (44), E adalah energi total. Fungsi $T(t)$ mudah diperoleh sebagai:

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar} \tag{45}$$

dan fungsi $\psi(\mathbf{r})$ memenuhi persamaan Schrödinger tak bergantung waktu sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{46}$$

Dengan demikian, untuk keadaan tunak, yaitu apabila potensial tak bergantung pada waktu secara eksplisit, kita dapat langsung mulai dengan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu (46), bukan dengan persamaan Schrödinger bergantung waktu (42), dengan komponen temporal $T(t)$ sudah diketahui seperti dalam persamaan (45). Untuk kasus gaya sentral, interaksi tidak bergantung pada vektor posisi $\mathbf{r}$, melainkan hanya pada jarak r, sehingga sistem memiliki simetri bola dan persamaan Schrödinger menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\,. \tag{47}$$

Selanjutnya, untuk kasus 1 dimensi, persamaan Schrödinger tak bergantung waktu menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)\,. \tag{48}$$

Contoh sederhana yang biasa dikenal di menanika kuantum adalah partkel dalam kotak. Pada kasus ini, sebuah partikel terperangkap dalam daerah $0 < x < l$ dengan potensial nol di dalam daerah tersebut. Dicari fungsi gelombang $\psi(x)$ yang merepresentasikan keadaan partikel dan juga energinya E. Di ujung-ujung daerah fungsi gelombang bernilai nol, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, dan ini menjadi syarat batas. Persamaan Schrödinger tak bergantung waktu 1 dimensi yang harus dselesaian adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x) \rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k^2\psi(x) = 0\,,\ \left(k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\,, \tag{49}$$

dengan solusi umum mudah diperoleh, yaitu:

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx\,. \tag{50}$$

Sesuai syarat batas $\psi(0) = 0$, $B = 0$, dan selanjutnya sesuai syarat batas $\psi(l) = 0$:

$$\sin kx = 0 \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l}\,,\ (n = 1, 2, 3, ...)\,. \tag{51}$$

Perhatikan bahwa $n = 0$ tidak diperhitungkan, karena jika $n = 0$, maka $\psi(x) = 0$ untuk nilai x berapapun, yang berarti partikel tidak ada di dalam kotak $0 < x < l$. Nilai-nilai k_n di persamaan (51) memberikan nilai-nilai energi E_n yang dapat dimiliki partikel, yaitu:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\,. \tag{52}$$

Kita dapatkan basis:

$$\Psi_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-iE_nt/\hbar} \tag{53}$$

untuk menyatakan solusi umum atau keadaan sembarang partikel dalam kotak $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-iE_nt/\hbar}\,. \tag{54}$$

C. Persamaan gelombang, getaran dawai

Kita amati, sebagai contoh, gelombang pada dawai (dawai gitar, dawai piano, atau lainnya). Ambil seutas dawai dengan panjang l yang direntangkan dan kedua ujungnya diikat. Kita tentukan saja sumbu x berimpit dengan dawai, dengan titik $x = 0$ berimpit dengan salah satu ujung dawai dan titik $x = l$ dengan ujung lain dawai. Bagian-bagian dawai yang dilewati gelombang bervibrasi di sekitar posisi seimbangnya dan kita set sumbu y sejajar dengan arah vibrasi tersebut, sehingga posisi bagian-bagian dawai di titik x pada suatu waktu t dinyatakan sebagai $y(x,t)$. Supaya sederhana, kita pilih kasus dengan pergeseran posisi bagian-bagian dawai itu sangat kecil, bahwa gradien $\partial y/\partial x$ sangat kecil, sehingga dapat dianggap bahwa dalam keadaan bergetar panjang dawai itu sama dengan l (pertambahan panjang dawai akibat digetarkan dapat diabaikan). Perambatan gelombang pada dawai terjadi pada satu sumbu, yaitu sumbu x, dengan demikian, persamaan gelombang yang berlaku persamaan gelombang 1 dimensi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)\,, \tag{55}$$

dengan v adalah cepat rambat gelombang. Perhatikan bahwa dalam menyatakan persamaan gelombang (55) sebagai titik awal perhitungan, kita telah banyak memperhatikan data-data fisis sistem atau fenomena yang diamati. Ini menjadi contoh dan berlaku juga secara umum dalam perhitungan fisika.

Jelas bahwa untuk mencari solusi persamaan (55) dapat digunakan teknik separasi variabel. Dengan menyatakan:

$$y(x,t) = X(x)T(t)\,, \tag{56}$$

diperoleh, sesuai teknik separasi variabel:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = -k^2 = konstan\,. \tag{57}$$

Perhatikan bahwa pada persamaan (57) telah kita masukan juga pertimbangan fisis, sehingga kita nyatakan *konstan* dengan $-k^2$, bukan k^2. Kita lihat berikut ini bahwa, dengan demikian, solusi yang diperoleh dapat memenuhi syarat batas yang ditetapkan. Dari persamaan (57), diperoleh:

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) + k^2 X(x) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d^2}{dt^2}T(t) + (kv)^2 T(t) = 0\,, \tag{58}$$

sehingga solusi umum didapatkan sebagai, dengan k bilangan gelombang dan ω frekuensi gelombang:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\,(C\sin\omega t + D\cos\omega t)\ ,\ \left(kv = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau} = \omega\right)\ , \tag{59}$$

dengan λ panjang gelombang dan τ periode gelombang. Menurut syarat batas, kedua ujung dawai terikat, $y(0,t) = y(l,t) = 0$, dengan demikian:

$$y(0,t) = 0 \rightarrow B = 0 \tag{60}$$

$$y(l,t) = 0 \rightarrow \ \sin kl = 0 \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l}\ ,\ (n = 1, 2, 3, ...)\,. \tag{61}$$

dan:

$$y(x,t) = A\sin\frac{n\pi x}{l}\left(C\sin\frac{n\pi vt}{l} + D\cos\frac{n\pi vt}{l}\right)\,. \tag{62}$$

Persamaan gelombang (55) merupakan persamaan differensial orde 2 dengan 2 variabel x dan t. Kita telah terapkan 2 syarat batas $y(0,t) = y(l,t) = 0$. Syarat batas ke-3 memberikan fungsi basis untuk menyatakan solusi yang umum dan syarat batas ke-4 memberikan solusi yang unik.

1. Kasus pertama, anggap mula-mula dawai disimpangkan. Dengan demikian, diperoleh simpangan awal di suatu posisi x, yaitu:

$$y(x,0) = f(x)\,, \tag{63}$$

dan mula-mula dawai diam, yaitu:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right|_{t=0} = 0\,. \tag{64}$$

Kemudian, dawai dilepaskan dan bergetar. Kita terapkan persamaan (64) sebagai syarat batas ke-3:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right|_{t=0} = \frac{n\pi v}{l}A\sin\frac{n\pi x}{l}C = 0 \rightarrow C = 0\,, \tag{65}$$

sehingga diperoleh fungsi basis:

$$y_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi vt}{l} \tag{66}$$

untuk menyatakan solusi umum:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi vt}{l}\,. \tag{67}$$

Solusi unik diperoleh dengan menerapkan syarat batas ke-4, persamaan (63), sehingga diperoleh koefisien ekspansi b_n:

$$\begin{aligned} y(x,0) = f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \rightarrow b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \sin \frac{n\pi x}{l} f(x)\,. \end{aligned} \tag{68}$$

Jika, sebagai contoh (lihat Boas p.634 Fig. 4.1):

$$f(x) = -\frac{h}{l}|2x - l| + h\,, \tag{69}$$

maka:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \sin\frac{n\pi x}{l}\left(-\frac{h}{l}|2x-l| + h\right) \\ &= \frac{2}{l}\int_0^{l/2} dx\, \sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{h}{l}(2x-l) + h\right) + \frac{2}{l}\int_{l/2}^{l} dx\, \sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{h}{l}(l-2x) + h\right) \\ &= \frac{4h}{l^2}\int_0^{l/2} dx\, \sin\frac{n\pi x}{l} x - \frac{4h}{l^2}\int_{l/2}^{l} dx\, \sin\frac{n\pi x}{l} x + \frac{4h}{l}\int_{l/2}^{l} dx\, \sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \\ &= -\frac{8h}{n^2\pi^2}(-1)^{(n+1)/2}\,,\ (n = ganjil)\,, \end{aligned} \tag{70}$$

sehingga:

$$y(x,t) = -\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=ganjil}\frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi v t}{l}\,. \tag{71}$$

2. Kasus kedua, dawai tidak disimpangkan, melainkan dipukul di satu titik, seperti halnya pada piano. Pada kasus ini, simpangan awal nol:

$$y(x,0) = 0 \tag{72}$$

dan kecepatan getar awal di posisi x:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right|_{t=0} = V(x)\,. \tag{73}$$

Dengan menerapkan syarat batas di persamaan (72), diperoleh:

$$y(x,0) = A\sin\frac{n\pi x}{l}D = 0 \rightarrow D = 0\,, \tag{74}$$

sehingga diperoleh fungsi basis:

$$y_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi v t}{l} \tag{75}$$

untuk menyatakan solusi umum:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi v t}{l}\,. \tag{76}$$

Solusi unik diperoleh dengan menerapkan syarat batas di persamaan (73), sehingga diperoleh koefisien ekspansi b_n:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\right|_{t=0} = V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi v}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$\rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l dx \, \sin\frac{n\pi x}{l} V(x) \,. \tag{77}$$

3. Kasus ketiga, ujung dawai di $x = l$ terikat, sedangkan ujung di $x = 0$ tidak terikat. Dengan demikian, ujung dawai di $x = 0$ juga bervibrasi ketika dilewati gelombang (bayangkan, misalkan, ujung dawai itu terikat pada sebuah cincin, yang dapat bergerak tanpa gesekan di sepanjang tiang, yang sejajar sumbu y). Berbeda dari ujung dawai di $x = l$, ujung dawai di $x = 0$ tidak membentuk sudut terhadap garis, yang sejajar sumbu x, dengan kata lain, berlaku:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} y(x,t)\right|_{x=0} = 0 \,. \tag{78}$$

Mula-mula dawai diam, yaitu:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\right|_{t=0} = 0 \tag{79}$$

dan diberi simpangan awal, yaitu:

$$y(x,0) = f(x) \,. \tag{80}$$

Kemudian, dawai dilepaskan dan bergetar. Kita terapkan syarat batas persamaan (78) pada persamaan (59), diperoleh:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} y(x,t)\right|_{x=0} = kA\left(C \sin\omega t + D\cos\omega t\right) = 0 \rightarrow A = 0 \,, \tag{81}$$

sehingga:

$$y(x,t) = B\cos kx \left(C\sin\omega t + D\cos\omega t\right) \,. \tag{82}$$

Kita terapkan syarat batas $y(l,t) = 0$, diperoleh:

$$y(l,t) = B\cos kl \left(C\sin\omega t + D\cos\omega t\right) = 0 \rightarrow \cos kl = 0 \,,\ k = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l} \,,\ (n = 0, 1, ...) \,, \tag{83}$$

sehingga:

$$y(x,t) = B\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\left(C\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi v t}{l} + D\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi v t}{l}\right) \,. \tag{84}$$

Kita terapkan syarat batas di persamaan (79), diperoleh:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\right|_{t=0} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi v}{l} B\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} C = 0 \rightarrow C = 0 \,, \tag{85}$$

sehingga diperoleh fungsi basis:

$$y_n(x,t) = \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi v t}{l} \,. \tag{86}$$

untuk menyatakan solusi umum:

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi v t}{l} \,. \tag{87}$$

Solusi unik diperoleh dengan menerapkan syarat batas di persamaan (80), sehingga diperoleh koefisien ekspansi a_n:

$$\begin{aligned} y(x,0) = f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \\ \rightarrow a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l dx\, \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} f(x) \,. \end{aligned} \tag{88}$$

Kita lihat lebih jauh makna fisis fungsi gelombang pada dawai. Sebagai contoh, ambil kasus pertama, yang memberikan fungsi gelombang $y_n(x,t)$ di persamaan (66) sebagai fungsi eigen persamaan gelombang (55) dengan nilai eigen k_n di persamaan (61). Fungsi gelombang basis di persamaan (66) dapat dituliskan sebagai:

$$y_n(x,t) = A_n(x) \cos 2\pi\nu_n t \,, \tag{89}$$

sehingga yang kita lihat adalah sebuah fungsi yang menggambarkan seutas dawai dengan bagian-bagiannya bergetar secara bersamaan dengan frekuensi ν_n yang sama:

$$\nu_n = \frac{nv}{2l} \,, \tag{90}$$

namun dengan amplitudo berbeda-beda sesuai posisinya:

$$A_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \,. \tag{91}$$

Dengan kata lain, yang kita amati adalah suatu gelombang berdiri (*standing wave*). Frekuensi ν_n merupakan frekuensi karakteristik dawai (bergantung pada v, yang berarti bergantung pada rapat massa linier dawai). Fungsi $y_n(x,t)$ di persamaan (89) menyatakan getaran dawai pada satu mode vibrasi tertentu, yang disebut mode normal vibrasi, dengan frekuensi ν_n di persamaan (90), yang merupakan frekuensi suatu nada tertentu. Frekuensi / nada dengan $n = 1$ disebut sebagai frekuensi / nada fundamental atau harmonik pertama, frekuensi / nada dengan $n = 2$ disebut sebagai frekuensi / nada atas pertama atau harmonik kedua, frekuensi / nada dengan $n = 3$ disebut sebagai frekuensi / nada atas kedua atau harmonik ketiga, demikian seterusnya. Fungsi gelombang umum di persamaan (67) menyatakan bahwa secara umum getaran dawai merupakan kombinasi beragam mode vibrasi normal yang mungkin.

Fungsi gelombang basis di persamaan (66) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} y_n(x,t) &= \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi v t}{l} \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{l}(x-vt) + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{l}(x+vt) \,. \end{aligned} \tag{92}$$

Suku pertama di persamaan (92) menyatakan gelombang pada dawai dengan arah rambat ke $x = l$, sedangkan suku kedua menyatakan gelombang dengan arah rambat ke $x = 0$. Dengan demikian, gelombang berdiri pada dawai dihasilkan oleh superposisi gelombang dengan frekuensi sama yang bergerak saling berlawanan. Gelombang-gelombang dengan arah berlawanan ini terjadi akibat dipantulkan di ujung-ujung dawai.