Catatan Fisika Matematika 3

Materi 9

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.619 – p.628

A. Bentuk-bentuk persamaan differensial parsial dalam fisika

Banyak formulasi matematik problem fisika ditunjukkan sebagai persamaan differensial parsial. Variabel-variabel dalam persamaan-persamaan differensial itu variabel spasial (variabel posisi, variabel koordinat) dan variabel temporal (variabel waktu). Persamaan differensial parsial tersebut dapat dikelompokkan sebagai persamaan differensial parsial eliptik, persamaan differensial parsial parabolik, persamaan differensial parsial hiperbolik.

- *Persamaan differensial parsial eliptik*

  Bentuk umum persamaan differensial parsial eliptik dalam fisika adalah:

  $$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\,. \tag{1}$$

  Di fisika persamaan (1) dikenal sebagai persamaan Poisson. Pada persamaan itu $u(\mathbf{r})$ suatu fungsi untuk suatu besaran fisika, seperti potensial listrik, potensial gravitasi, dan $f(\mathbf{r})$ suatu fungsi yang ditentukan oleh keadaan sistem yang diamati, seperti distribusi muatan listrik, distribusi massa, yang menjadi sumber atau penyebab bagi besaran fisika $u(\mathbf{r})$, sehingga $f(\mathbf{r})$ disebut sebagai rapat sumber (*source density*). Pada persamaan differensial parsial eliptik hanya ditemui variabel spasial. Apabila tidak ada rapat sumber, $f(\mathbf{r}) = 0$, didapatkan persamaan yang dikenal sebagai persamaan Laplace:

  $$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{2}$$

  Pada persamaan Laplace, $u(\mathbf{r})$ dapat merepresentasikan suatu besaran fisika, yang disebabkan oleh suatu sumber yang sangat jauh, relatif terhadap daerah yang diamati.

- *persamaan differensial parsial parabolik*

  Bentuk umum persamaan differensial parsial parabolik dalam fisika adalah:

  $$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r},t)\,. \tag{3}$$

  Contoh, dalam fisika dikenal persamaan difusi, yang menggambarkan suatu aliran, seperti aliran zat, aliran kalor, dalam keadaan tanpa sumber, $f(\mathbf{r},t) = 0$:

  $$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{r},t) = 0\,. \tag{4}$$

Dalam peristiwa aliran zat, $u(\mathbf{r},t)$ adalah konsentrasi zat. Dalam kasus aliran kalor, $u(\mathbf{r},t)$ menyatakan temperatur. Konstanta α^2 disebut sebagai difusivitas. Persamaan difusi (4) dapat diseparasi dalam komponen spasial dan komponen temporal, dalam hal ini $u(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r})T(t)$. Komponen spasial $F(\mathbf{r})$ memenuhi persamaan yang dikenal dengan persamaan Helmholtz:

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}) + k^2 F(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{5}$$

- *persamaan differensial parsial hiperbolik*

  Bentuk umum persamaan differensial parsial hiperbolik dalam fisika adalah:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r},t)\,. \tag{6}$$

  Contoh, dalam fisika dikenal persamaan gelombang, yang menggambarkan suatu usikan yang merambat atau gelombang:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\mathbf{r},t) = 0\,. \tag{7}$$

  Pada persamaan (7), $u(\mathbf{r},t)$ menyatakan, contoh, pergeseran posisi (kasus gelombang mekanik), medan listrik dan medan magnetik (kasus gelombang elektromagnetik), dengan v adalah cepat rambat gelombang, yang untuk gelombang elektromagnetik biasa dituliskan sebagai c. Seperti pada persamaan difusi (4), persamaan gelombang (7) dapat diseparasi dalam komponen spasial dan komponen temporal, dalam hal ini $u(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r})T(t)$, dengan komponen spasial $F(\mathbf{r})$ memenuhi persamaan Helmholtz.

- *persamaan Schrödinger*

  Dalam mekanika kuantum dijumpai persamaan utama, yaitu persamaan Schrödinger, yang merupakan persamaan gelombang mekanika kuantum:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)\,, \tag{8}$$

  dengan dengan $i = \sqrt{-1}$, $\hbar = h/(2\pi)$, h konstanta Planck, m massa partikel, $\psi(\mathbf{r},t)$ fungsi gelombang yang merepresentasikan keadaan partikel, dan $V(\mathbf{r},t)$ energi potensial yang merepresentasikan interaksi atau gaya yang mempengaruhi keadaan partikel.

Yang kita cari adalah solusi persamaan-persamaan differensial parsial tersebut dan itu dicontohkan pada bagian-bagian berikut. Dari contoh-contoh tersebut kita pelajari beberapa metode serta teknik, yang diharapkan dapat kita terapkan juga kemudian pada problem-probem lain yang serupa.

B. Separasi variabel dan contohnya pada problem persamaan Laplace

Ada sebuah lempeng tipis logam, yang temperatur sisi-sisinya dijaga tetap. Temperatur di kedua sisi panjang dan di salah satu sisi pendek logam 0 ℃, sedangkan temperatur di sisi pendek yang lain 100 ℃. Lebar lempeng logam itu a cm, panjangnya b cm, dan tebalnya dapat diabaikan. Dicari temperatur di sembarang titik pada logam.

Karena benda yang diamati berupa lempeng tipis, kita pilih kerangka Cartesian dengan sumbu-sumbu x dan y. Kita atur sehingga sumbu x berimpit dengan sisi pendek lempeng yang bertemperatur 100 ℃, sumbu y berimpit dengan salah satu sisi panjang lempeng, dan sisi panjang yang lain pada $x = a$ cm (lihat Boas Bab 13 Fig 2.1.). Kita cari temperatur $T(x, y)$ dalam ℃, dengan x dan y dalam cm. Pada sistem tidak ada sumber kalor, dengan demikian, $T(x, y)$ memenuhi persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}T(x,y) = 0\,. \tag{9}$$

Sesuai keterangan problem, diketahui syarat batas (*boundary conditions*) sebagai berikut: $T(x, 0) =$ 100 ℃, $T(0, y) = T(a, y) = T(x, b) = 0$ ℃.

Kita lihat komponen tiap suku pada persamaan (9), selain $T(x, y)$, bergantung pada salah satu variabel saja, x atau y. Jadi, kita asumsikan bahwa $T(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian suatu fungsi yang bergantung hanya pada x dan suatu fungsi lain yang bergantung hanya pada y, yaitu kita coba terapkan $T(x, y) = X(x)Y(y)$. Ini merupakan cara yang disebut separasi variabel, yaitu solusi persamaan differensial dinyatakan sebagai perkalian fungsi-fungsi, yang masing-masing bergantung hanya pada salah satu variabel.

Kita masukkan $T(x, y) = X(x)Y(y)$ ke persamaan (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)Y(y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}X(x)Y(y) &= 0 \\ \to Y(y)\frac{d^2}{dx^2}X(x) + X(x)\frac{d^2}{dy^2}Y(y) &= 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Kita bagi persamaan (10) dengan $T(x, y) = X(x)Y(y)$ dan diperoleh:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = 0\,. \tag{11}$$

Tiap suku pada persamaan (11) bergantung hanya pada salah satu variabel, x atau y. Untuk x tetap dan y berubah-ubah, suku pertama bernilai tetap. Namun, suku kedua juga bernilai tetap, karena jumlah kedua suku tetap 0. Dengan demikian, suku kedua konstan. Demikian pula, untuk y tetap dan x berubah-ubah, suku kedua bernilai tetap. Namun, suku pertama juga bernilai tetap, karena jumlah kedua suku tetap 0. Dengan demikian, suku pertama konstan. Jadi, tiap suku pada persamaan (11) konstan:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = \gamma = konstan\,. \tag{12}$$

Jika kita coba $\gamma = k^2$, dengan $k \geqslant 0$, diperoleh:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = k^2 \tag{13}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}X(x) - k^2X(x) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d^2}{dy^2}Y(y) + k^2Y(y) = 0 \tag{14}$$

$$\rightarrow X(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \quad \text{dan} \quad Y(y) = C\sin ky + D\cos ky \tag{15}$$

$$\rightarrow T(x,y) = \left(Ae^{-kx} + Be^{kx}\right)(C\sin ky + D\cos ky)\ . \tag{16}$$

Jika kita coba $\gamma = -k^2$, dengan $k \geqslant 0$, diperoleh:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = -k^2 \tag{17}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}X(x) + k^2X(x) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d^2}{dy^2}Y(y) - k^2Y(y) = 0 \tag{18}$$

$$\rightarrow X(x) = A\sin kx + B\cos kx \quad \text{dan} \quad Y(y) = Ce^{-ky} + De^{ky} \tag{19}$$

$$\rightarrow T(x,y) = (A\sin kx + B\cos kx)\left(Ce^{-ky} + De^{ky}\right)\ . \tag{20}$$

Solusi umum di persamaan (16) dan (20) sesungguhnya sama, hanya bertukar variabel x dan y. Dengan demikian, kita dapat pilih yang mana saja. Namun, untuk mendapatkan solusi yang unik sesuai syarat batas, kita sebaiknya memilih, yang mana yang lebih mudah dipakai untuk mencari solusi unik, persamaan (16) atau (20). Kita dapat coba keduanya dan didapatkan bahwa lebih mudah mengambil persamaan (20).

Menurut syarat batas, $T(0,y) = 0$:

$$T(0,y) = B\left(Ce^{-ky} + De^{ky}\right) = 0 \rightarrow B = 0 \tag{21}$$

$$\rightarrow T(x,y) = A\sin kx\left(Ce^{-ky} + De^{ky}\right)\ . \tag{22}$$

Menurut syarat batas, $T(a,y) = 0$:

$$T(a,y) = A\sin ka\left(Ce^{-ky} + De^{ky}\right) = 0 \rightarrow \sin ka = 0 \tag{23}$$

$$\rightarrow k = \frac{n\pi}{a}\ , \ (n = 1, 2, 3, ...) \tag{24}$$

$$\rightarrow T(x,y) = A\sin\frac{n\pi x}{a}\left(Ce^{-n\pi y/a} + De^{n\pi y/a}\right)\ . \tag{25}$$

Perhatikan bahwa $n = 0$ tidak kita sertakan, karena jika $n = 0$, $T(x,y)$ bernilai 0 di titik manapun. Selanjutnya, menurut syarat batas, $T(x,b) = 0$:

$$T(x,b) = A\sin\frac{n\pi x}{a}\left(Ce^{-n\pi b/a} + De^{n\pi b/a}\right) = 0 \rightarrow D = -Ce^{-2n\pi b/a} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow T(x,y) &= A\sin\frac{n\pi x}{a}\left(Ce^{-n\pi y/a} - Ce^{-2n\pi b/a}e^{n\pi y/a}\right)\\ &= ACe^{-n\pi b/a}\sin\frac{n\pi x}{a}\left(e^{n\pi(b-y)/a} - e^{-n\pi(b-y)/a}\right)\\ &= 2ACe^{-n\pi b/a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}\ .\end{aligned} \tag{27}$$

Sampai di sini kita lihat bahwa ada lebih dari satu solusi persamaan (9), seperti ditunjukkan oleh persamaan (27), masing-masing dengan nilai n berlainan, dengan $n = 1, 2, 3, ...$ Dengan demikian, solusi umum persamaan (9) merupakan kombinasi linier dari solusi di persamaan (27):

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}\ , \tag{28}$$

dengan c_n koefisien ekspansi. Kita tidak perlu sertakan $2ACe^{-n\pi b/a}$ dari persamaan (27), yang hanya merupakan konstanta. Persamaan (28) menunjukkan deret Fourier sinus. Dengan demikian, koefisien c_n dapat dicari dengan menerapkan sifat ortogonal fungsi sinus dan syarat batas terakhir, yaitu $T(x,0) = 100$ ℃ (lihat kembali dert Fourier):

$$\begin{aligned} T(x,0) = 100 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi b}{a} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \left(d_n = c_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right) \qquad (29) \\ \to d_n &= \frac{2}{a}\int_0^a dx\, \sin\frac{n\pi x}{a} T(x,0) \\ &= \frac{200}{a}\int_0^a dx\, \sin\frac{n\pi x}{a} \\ &= \frac{200}{a}\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\Big|_a^0 \\ &= \frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\ &= \frac{400}{n\pi}\begin{cases} 1 & , (n = \text{ganjil}) \\ 0 & , (n = \text{genap}) \end{cases} . \qquad (30) \\ \to c_n &= \frac{400}{n\pi \sinh\frac{n\pi b}{a}}\begin{cases} 1 & , (n = \text{ganjil}) \\ 0 & , (n = \text{genap}) \end{cases} \qquad (31) \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh temperatur pada lempeng logam sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \frac{400}{\pi}\sum_{n=\text{ganjil}} \frac{1}{n\sinh\frac{n\pi b}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a} \\ &= \frac{400}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)\sinh\frac{(2m+1)\pi b}{a}} \sin\frac{(2m+1)\pi x}{a} \sinh\frac{(2m+1)\pi(b-y)}{a}\,, \qquad (32) \end{aligned}$$

dengan $m = 0, 1, 2, 3, ...$

Kini, kita ambil kasus khusus bahwa lempeng logam itu sangat panjang (*semi-infinite*), yaitu $b \gg a$, sehingga dapat dianggap bahwa $b \to \infty$. Untuk kasus ini, kita dapat ambil solusi di persamaan (20), namun tanpa suku e^{ky}, karena suku itu bernilai tak berhingga untuk $y \to \infty$ dan hal ini tidak sesuai syarat batas $T(x,b) = 0$. Jadi:

$$T(x,y) = (A\sin kx + B\cos kx)\, e^{-ky} \qquad (33)$$

dan syarat batas $T(0,y) = T(a,y) = 0$ membawa kita pada hasil seperti persamaan (25), namun tanpa suku $e^{n\pi y/a}$:

$$T(x,y) = A\sin\frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a}\,, \; (n = 1, 2, 3, ...)\,. \qquad (34)$$

Solusi di persamaan (34) sudah sesuai dengan syarat batas $T(x,b) = 0$, dengan $b \to \infty$. Seperti persamaan (28), solusi umum $T(x,y)$ merupakan kombinasi linier:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a}\,. \qquad (35)$$

Sesuai syarat batas $T(x, 0) = 100$, diperoleh:

$$T(x, 0) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{36}$$

$$\rightarrow c_n = \frac{400}{n\pi} \begin{cases} 1 & , (n = \text{ganjil}) \\ 0 & , (n = \text{genap}) \end{cases} . \tag{37}$$

Jadi, diperoleh temperatur pada lempeng logam (*semi-infinite*) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{400}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a} \\ &= \frac{400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{a} e^{-n\pi y/a} , \end{aligned} \tag{38}$$

dengan $m = 0, 1, 2, 3, ...$

Pada pekerjaan di atas, yang berakhir pada persamaan (32) dan juga persamaan (38) untuk kasus lempeng *semi-infinite*, kita telah memilih solusi awal di persamaan (20), yang lebih mudah dipakai untuk syarat batas $T(x, 0) = 100$ ℃, $T(0, y) = T(a, y) = T(x, b) = 0$ ℃. Ini tidak berarti bahwa solusi awal di persamaan (16) salah, karena kedua solusi pada dasarnya sama. Kini, jika syarat batas diganti menjadi $T(0, y) = 100$ ℃, $T(x, 0) = T(x, b) = T(a, y) = 0$ ℃, maka justru solusi awal di persamaan (16) lebih mudah dipakai dan diperoleh hasil serupa dengan persamaan (32), namun variabel x dan y, serta panjang sisi lempeng a dan b, bertukar tempat:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{400}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}} \frac{1}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi(a-x)}{b} \\ &= \frac{400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1) \sinh \frac{(2m+1)\pi a}{b}} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{b} \sinh \frac{(2m+1)\pi(a-x)}{b} , \end{aligned} \tag{39}$$

dengan $m = 0, 1, 2, 3, ...$

Kita sudah punya dua kasus:

1. Kasus dengan syarat batas $T(x, 0) = 100$ ℃, $T(0, y) = T(a, y) = T(x, b) = 0$ ℃, dengan hasil persamaan (32).

2. Kasus dengan syarat batas $T(0, y) = 100$ ℃, $T(x, 0) = T(x, b) = T(a, y) = 0$ ℃, dengan hasil persamaan (39).

Berbekal dua kasus dan dua hasil tersebut, kita dapat selesaikan kasus lain. Contoh, kasus ke-3 dengan syarat batas $T(x, 0) = T(0, y) = 100$ ℃, $T(x, b) = T(a, y) = 0$ ℃. Perhatikan bahwa syarat batas pada kasus ke-3 sama dengan jumlah syarat batas pada dua kasus sebelum ini:

$$T(x, 0) = 100 + 0 = 100 \tag{40}$$

$$T(0, y) = 0 + 100 = 100 \tag{41}$$

$$T(a,y) = 0 + 0 = 0 \tag{42}$$

$$T(x,b) = 0 + 0 = 0\,. \tag{43}$$

Dengan demikian, temperatur pada lempeng logam dengan syarat batas $T(x,0) = T(0,y) = 100$ ℃, $T(x,b) = T(a,y) = 0$ ℃ sama dengan jumlah persamaan (32) dan (39):

$$\begin{aligned} T(x,y) = &\frac{400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)\sinh\frac{(2m+1)\pi b}{a}} \sin\frac{(2m+1)\pi x}{a} \sinh\frac{(2m+1)\pi(b-y)}{a} \\ &+ \frac{400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)\sinh\frac{(2m+1)\pi a}{b}} \sin\frac{(2m+1)\pi y}{b} \sinh\frac{(2m+1)\pi(a-x)}{b}\,, \end{aligned} \tag{44}$$

dengan $m = 0, 1, 2, 3, ...$

Mencari solusi unik suatu persaman differensial (biasa maupun parsial) merupakan problem syarat batas dan seringkali juga merupakan problem nilai eigen. Pada problem nilai eigen, solusi yang diperoleh berkenaan dengan nilai tertentu suatu konstanta. Untuk nilai lain dari konstanta itu, diperoleh solusi yang lain. Contoh, kita lihat saja kasus pertama (untuk kasus lain berlaku hal serupa). Pada kasus tersebut, diperoleh solusi $T_n(x,y)$:

$$T_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a} \tag{45}$$

berkenaan dengan nilai konstanta k_n:

$$k_n = \frac{n\pi}{a}\,. \tag{46}$$

Pasangan $T_n(x,y)$ di persamaan (45) dan k_n di persamaan (46) berturut-turut disebut sebagai fungsi eigen dan nilai eigen persamaan differensial (9) dengan syarat batas $T(0,y) = T(a,y) = T(x,b) = 0$ ℃. Dalam ungkapan lain, $T_n(x,y)$ adalah fungsi eigen persamaan differensial (9) (dengan syarat batas $T(0,y) = T(a,y) = T(x,b) = 0$ ℃) dengan nilai eigen k_n. Untuk nilai n berbeda, diperoleh nilai k_n dan fungsi $T_n(x,y)$ berbeda. Fungsi eigen $T_n(x,y)$ menjadi fungsi basis untuk menyatakan sembarang fungsi yang memenuhi persamaan differensial (9).[1] Ini telah ditunjukkan di persamaan (28), yang dapat ditulis sebagai:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x,y)\,. \tag{47}$$

[1]Bagaimana dapat dijumpai sembarang fungsi yang memenuhi persamaan differensial (9)? Perhatikan bahwa persamaan (9) merupakan persamaan differensial orde 2 dengan 2 variabel, sehingga diperlukan minimal 4 syarat batas untuk mendapatkan solusi yang unik. Syarat batas $T(0,y) = T(a,y) = T(x,b) = 0$ hanya tiga, dengan demikian, solusi yang diperoleh masih bersifat sembarang, tidak unik. Solusi unik diperoleh dengan menentukan syarat batas tambahan, sebagai contoh, $T(x,0) = 100$ ℃.