Catatan Fisika Matematika 3

Materi 8

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.607 – p.618

## A. Operator tangga dan fungsi Hermite

Pada bagian ini kita lihat satu metode lain untuk mencari solusi persamaan differensial, yaitu metode operator. Sekedar catatan, metode operator ini akan ditemui juga aplikasinya dalam mekanika kuantum. Di sini sebagai contoh, kita gunakan metode operator untuk mendapatkan fungsi Hermite sebagai solusi persamaan differensial berikut:

$$\frac{d^2}{dx^2}y_n(x) - x^2 y_n(x) = -(2n+1)y_n(x)\,,\ \ (n = 0, 1, 2, ...)\,. \tag{1}$$

Mula-mula kita definisikan operator $\hat{D}$ (kita beri saja tanda topi "ˆ" untuk operator) sebagai berikut:

$$\hat{D} = \frac{d}{dx}\,. \tag{2}$$

Dengan demikian, contoh:

$$\hat{D}f(x) = \frac{d}{dx}f(x)\,. \tag{3}$$

Kemudian, kita definisikan operator $\hat{A}_\pm$ sebagai berikut:

$$\hat{A}_\pm = \hat{D} \mp x\,. \tag{4}$$

Kita peroleh operasi di bawah ini:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\pm y_n(x) &= (\hat{D} \mp x)y_n(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx} \mp x\right) y_n(x) \\
&= \frac{d}{dx}y_n(x) \mp x y_n(x) && (5) \\
\hat{A}_+\hat{A}_- y_n(x) &= (\hat{D} - x)(\hat{D} + x)y_n(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx}y_n(x) + x y_n(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y_n(x) + x y_n(x)\right) - x\left(\frac{d}{dx}y_n(x) + x y_n(x)\right) \\
&= \frac{d^2}{dx^2}y_n(x) + y_n(x) + x\frac{d}{dx}y_n(x) - x\frac{d}{dx}y_n(x) - x^2 y_n(x) \\
&= \frac{d^2}{dx^2}y_n(x) - x^2 y_n(x) + y_n(x) && (6)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_-\hat{A}_+y_n(x) &= (\hat{D}+x)(\hat{D}-x)y_n(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d}{dx}y_n(x)-xy_n(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y_n(x)-xy_n(x)\right)+x\left(\frac{d}{dx}y_n(x)-xy_n(x)\right) \\
&= \frac{d^2}{dx^2}y_n(x)-y_n(x)-x\frac{d}{dx}y_n(x)+x\frac{d}{dx}y_n(x)-x^2y_n(x) \\
&= \frac{d^2}{dx^2}y_n(x)-x^2y_n(x)-y_n(x)\,. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Perhatikan persamaan (6) dan (7) bahwa urutan operator penting; secara umum urutan berbeda memberikan hasil yang berbeda. (Ini bukan hal yang aneh. Kita dapat pahami bahwa, contoh, *menuang gula ke dalam air, kemudian mengaduk* berbeda hasilnya dari *mengaduk, kemudian menuang gula ke dalam air.*) Sesuai persamaan (1), persamaan (6) dan (7) dapat dituliskan sebagai:

$$\hat{A}_+\hat{A}_-y_n(x) = -(2n+1)y_n(x)+y_n(x) = -2ny_n(x) \qquad (8)$$

$$\hat{A}_-\hat{A}_+y_n(x) = -(2n+1)y_n(x)-y_n(x) = -2(n+1)y_n(x)\,. \qquad (9)$$

Kita lanjutkan dengan mengerjakan operasi berikut:

$$\hat{A}_-\hat{A}_+\hat{A}_-y_n(x) = -2n\hat{A}_-y_n(x) = -2((n-1)+1)\hat{A}_-y_n(x) \qquad (10)$$

$$\hat{A}_+\hat{A}_-\hat{A}_+y_n(x) = -2(n+1)\hat{A}_+y_n(x)\,. \qquad (11)$$

Kita bandingkan persamaan (10) terhadap persamaan (9), kita dapatkan bahwa:

$$\hat{A}_-y_n(x) \propto y_{n-1}(x)\,. \qquad (12)$$

Berikutnya, kita bandingkan persamaan (11) terhadap persamaan (8), kita dapatkan bahwa:

$$\hat{A}_+y_n(x) \propto y_{n+1}(x)\,. \qquad (13)$$

Karena itu, operator $\hat{A}_+$ dan $\hat{A}_-$ berturut-turut disebut sebagai operator yang menaikkan (*raising operator*) dan operator yang menurunkan (*lowering operator*). Keduanya disebut sebagai operator tangga (*ladder operator*).

Kita selesaikan pencarian solusi persamaan (1), yaitu fungsi Hermite. Kita ambil persamaan (12) dan (13) dan supaya mudah kita tentukan konstanta kesebandingannya adalah 1:

$$\hat{A}_-y_n(x) = y_{n-1}(x) \qquad (14)$$

$$\hat{A}_+y_n(x) = y_{n+1}(x)\,. \qquad (15)$$

Mengingat nilai terkecil $n$ adalah 0, maka tidak ada $y_{-1}(x)$, sehingga:

$$\hat{A}_-y_0(x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \frac{d}{dx}y_0(x) + xy_0(x) = 0 \\
&\rightarrow y_0(x) = Ce^{-x^2/2} \\
&\rightarrow y_0(x) = e^{-x^2/2}\,, \ (\text{supaya mudah, } C = 1)\,. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Setelah $y_0(x)$ diperoleh, $y_n(x)$ dapat dicari dengan menggunakan $\hat{A}_+$ sesuai persamaan (15):

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \hat{A}_+ y_0(x) \\
y_2(x) &= \hat{A}_+ y_1(x) = \hat{A}_+\hat{A}_+ y_0(x) = \hat{A}_+^2 y_0(x) \\
&\ \ ... \\
y_n(x) &= \hat{A}_+^n y_0(x)\,. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh fungsi Hermite:

$$
y_n(x) = \left(\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{-x^2/2} = e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,. \qquad (18)
$$

## B. Polinomial Hermite

- Polinomial Hermite $H_n(x)$ merupakan solusi persamaan differensial berikut:

$$
\frac{d^2}{dx^2}H_n(x) - 2x\frac{d}{dx}H_n(x) + 2nH_n(x) = 0\,, \ (n = 0, 1, 2, ...)\,. \qquad (19)
$$

  Contoh $H_n(x)$:

$$
H_0(x) = 1\,, \quad H_1(x) = 2x\,, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2\,. \qquad (20)
$$

- Polinomial Hermite juga dapat dihitung sebagai:

$$
H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} y_n(x)\,, \qquad (21)
$$

  dengan $y_n(x)$ adalah fungsi di persamaan (18). Dengan demikian, diperoleh :

$$
H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,, \qquad (22)
$$

  sebagai rumus Rodrigues polinomial Hermite.

- Polinomial Hermite bersifat ortogonal pada interval $(-\infty, \infty)$ dengan fungsi bobot $e^{-x^2}$:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{mn}\,. \qquad (23)
$$

- Fungsi pembangkit (*generating function*) untuk polinomial Hermite adalah:

$$
\Phi(x, h) = e^{2xh - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{h^n}{n!}\,. \qquad (24)
$$

  Dari $\Phi(x, h)$ orang dapat menurunkan relasi rekursi untuk polinomial Hermite, dua di antaranya diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}H_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) \qquad (25) \\
H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

## C. Polinomial Laguerre

- Polinomial Laguerre $L_n(x)$ merupakan solusi persamaan differensial berikut:

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n(x) + (1-x)\frac{d}{dx}L_n(x) + nL_n(x) = 0\,,\ \ (n = 0, 1, 2, ...)\,. \tag{27}$$

  Contoh $L_n(x)$:

$$L_0(x) = 1\,,\quad L_1(x) = 1 - x\,,\quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\,. \tag{28}$$

- Polinomial Laguerre juga dapat dihitung dengan rumus Rodrigues berikut:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\,, \tag{29}$$

  sehingga diperoleh juga $L_n(x)$ sebagai berikut:

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right)\frac{x^m}{m!}\,, \tag{30}$$

  dengan $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right)$ koefisien binomial.

- Polinomial Laguerre bersifat ortogonal pada interval $(0, \infty)$ dengan fungsi bobot $e^{-x}$:

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x}L_m(x)L_n(x) = \delta_{mn}\,. \tag{31}$$

- Fungsi pembangkit (*generating function*) untuk polinomial Laguerre adalah:

$$\Phi(x, h) = \frac{1}{1-h}e^{-xh/(1-h)} = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)h^n\,. \tag{32}$$

  Dari $\Phi(x, h)$ orang dapat menurunkan relasi rekursi untuk polinomial Laguerre, tiga di antaranya diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}(x) - \frac{d}{dx}L_n(x) + L_n(x) = 0 \tag{33}$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \tag{34}$$

$$x\frac{d}{dx}L_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0\,. \tag{35}$$

## D. Polinomial Laguerre terasosiasi

- Polinomial Laguerre $L_n^k(x)$ terasosiasi merupakan solusi persamaan differensial berikut:

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n^k(x) + (k+1-x)\frac{d}{dx}L_n^k(x) + nL_n^k(x) = 0\,,\ \ (k > -1)\,. \tag{36}$$

  Sesuai persamaan differensial (36), polinomial Laguerre terasosiasi adalah turunan polinomial Laguerre dan didefinisikan sebagai berikut:

$$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)\,. \tag{37}$$

- Polinomial Laguerre terasosiasi juga dapat dihitung dengan rumus Rodrigues berikut:

$$L_n^k(x) = \frac{1}{n!} x^{-k} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left( x^{n+k} e^{-x} \right) . \tag{38}$$

- Polinomial Laguerre terasosiasi bersifat ortogonal pada interval $(0, \infty)$ dengan fungsi bobot $x^k e^{-x}$:

$$\int_0^\infty dx \, x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{mn} \,. \tag{39}$$

- Dua contoh relasi rekursi untuk polinomial Laguerre terasosiasi diperoleh sebagai berikut:

$$(n+1) L_{n+1}^k(x) - (2n+k+1-x) L_n^k(x) + (n+k) L_{n-1}^k(x) = 0 \tag{40}$$

$$x \frac{d}{dx} L_n^k(x) - n L_n^k(x) + (n+k) L_{n-1}^k(x) = 0 \,. \tag{41}$$