Catatan Fisika Matematika 3

Materi 7

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.598 – p.606

**A. Pendulum yang bertambah panjang**

Pada bagian ini kita lihat satu contoh aplikasi fungsi Bessel, yaitu pada kasus pendulum sederhana (bandul matematis), yang panjang talinya bertambah secara tetap:

$$l = l_0 + vt\,. \tag{1}$$

Persamaan gerak pendulum, yang panjang talinya tidak tetap, diperoleh sebagai berikut (cara mudah mendapatkannya dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange, diberikan di kuliah Mekanika Klasik):

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\frac{d\theta}{dt}\right) + mgl\sin\theta = 0\,. \tag{2}$$

Kita ubah variabel bebasnya, dari $t$ menjadi $l$, sesuai persamaan (1) dan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(ml^2\frac{d\theta}{dt}\right) + mgl\sin\theta &= 0\\
\rightarrow \frac{d}{dl}\left(ml^2\frac{d\theta}{dl}\frac{dl}{dt}\right)\frac{dl}{dt} + mgl\sin\theta &= 0\\
\rightarrow \frac{d}{dl}\left(ml^2\frac{d\theta}{dl}v\right)v + mgl\sin\theta &= 0\\
\rightarrow ml^2v^2\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2mlv^2\frac{d\theta}{dl} + mgl\sin\theta &= 0\\
\rightarrow l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{v^2}\sin\theta &= 0\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Untuk simpangan kecil, $\sin\theta \approx \theta$, sehingga persamaan gerak menjadi:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{2}{l}\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{lv^2}\theta = 0\,. \tag{4}$$

Kita bandingkan persamaan (4) dengan persamaan differensial dengan solusi fungsi Bessel (Boas, persamaan (16.1)):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2a}{x}\frac{dy}{dx} + \left[\left(bcx^{c-1}\right)^2 + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right]y = 0 \tag{5}$$

$$y(x) = x^a Z_p\left(bx^c\right)\,, \tag{6}$$

dengan $Z_p$ adalah fungsi Bessel. Kita dapatkan solusi persamaan (4) sebagai berikut:

$$\theta(l) = l^{-\frac{1}{2}} Z_1\left(\frac{2g^{\frac{1}{2}}}{v}l^{\frac{1}{2}}\right)\,. \tag{7}$$

Kita dapat nyatakan solusi umum persamaan (4) sebagai berikut:

$$\theta(u) = Au^{-1}J_1(u) + Bu^{-1}N_1(u)\,, \quad \left(u = \frac{2g^{\frac{1}{2}}}{v}l^{\frac{1}{2}}\right)\,, \tag{8}$$

dengan konstanta $A$ dan $B$ ditentukan berdasarkan syarat batas. Kecepatan ayunan diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\theta}{du}\frac{du}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{d\theta}{du}\sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{9}$$

Dengan relasi rekursi:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p}J_p(x)\right] = -x^{-p}J_{p+1}(x)\,, \tag{10}$$

diperoleh:

$$\frac{d\theta}{du} = -\,Au^{-1}J_2(u) - Bu^{-1}N_2(u) \tag{11}$$

$$\to \frac{d\theta}{dt} = -\,\sqrt{\frac{g}{l}}\left(Au^{-1}J_2(u) + Bu^{-1}N_2(u)\right)\,, \tag{12}$$

Apabila diberikan syarat batas $\theta(t=0) = \theta_0$ dan $\frac{d\theta}{dt}\big|_{t=0} = 0$, diperoleh:

$$A = -\frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 N_2(u_0) \quad \text{dan} \quad B = \frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 J_2(u_0)\,, \quad \left(u_0 = \frac{2g^{\frac{1}{2}}}{v}l_0^{\frac{1}{2}}\right)\,. \tag{13}$$

Kasus khusus, jika $l_0$ dan $v$ sedemikian, sehingga $u_0$ merupakan salah satu titik nol $J_2$, maka $B = 0$, sehingga:

$$\theta(u) = -\,\frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 N_2(u_0)u^{-1}J_1(u) \tag{14}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 N_2(u_0)u^{-1}J_2(u)\,. \tag{15}$$

Pada titik seimbang, $\theta = 0$, yang berarti bandul berada di titik seimbang pada nilai $u$, yang merupakan titik nol $J_1$. Pada simpangan maksimum, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, yang berarti bandul berada di titik simpangan maksimum pada nilai $u$, yang merupakan titik nol $J_2$.

### B. Ortogonalitas fungsi Bessel

Ortogonalitas fungsi Bessel dinyatakan bukan menurut ordenya, melainkan menurut titik nolnya. Ini serupa dengan, misalkan fungsi sinus:

$$\int_0^1 dx\,\sin n\pi x \sin m\pi x \propto \delta_{nm}\,. \tag{16}$$

Pada ortogonalitas (16), $n$ dan $m$ bukan orde fungsi sinus, melainkan menentukan titk-titik nol fungsi sinus (selain titik nol khusus pada $x = 0$ dan $x = 1$). Jika $\alpha$ dan $beta$ merupakan titik-titik nol fungsi Bessel orde $p$, $J_p$, yaitu $J_p(\alpha) = 0$, $J_p(\beta) = 0$, maka ortogonalitas fungsi Bessel diperoleh sebagai berikut:

$$\int_0^1 dx\,xJ_p(\alpha x)J_p(\beta x) = \begin{cases} 0 & ,\ (\alpha \neq \beta) \\ \frac{1}{2}J_{p+1}^2(\alpha) = \frac{1}{2}J_{p-1}^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}J_p(x)\right)^2\Big|_{x=\alpha} & ,\ (\alpha = \beta) \end{cases}\,. \tag{17}$$

Dengan transformasi $x = r/a$ kita dapatkan ortogonalitas fungsi Bessel pada interval $(0, a)$ sebagai berikut:

$$\int_0^a dr\, r J_p(\alpha r/a) J_p(\beta r/a) = \begin{cases} 0 & , \ (\alpha \neq \beta) \\ \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha) = \frac{a^2}{2} J_{p-1}^2(\alpha) = \frac{a^2}{2} \left( \frac{d}{dx} J_p(x) \right)^2 \Big|_{x=\alpha} & , \ (\alpha = \beta) \end{cases} . \tag{18}$$

Persamaan (17) dan (18) merupakan contoh ortogonalitas yang lebih umum, yaitu:

$$\int_a^b dx\, w(x) A_n^*(x) A_m(x) \propto \delta_{mn} , \tag{19}$$

yang menunjukkan bahwa $A_n(x)$ merupakan himpunan fungsi ortogonal pada interval $(a, b)$ dengan fungsi bobot $w(x)$.

### C. Rumus pendekatan untuk fungsi Bessel

Untuk $x$ sangat kecil dan $x$ sangat besar fungsi Bessel dapat dihitung sebagai suatu pendekatan dengan suatu rumus. Rumus-rumus tersebut dapat dilihat di Boas, halaman 604.

### D. Solusi deret dan teorema Fuchs

Apakah semua persamaan differensial dapat diselesaikan menggunakan solusi deret atau metode Frobenius? Ambillah contoh umum persamaan differensial orde 2:

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + f(x) \frac{d}{dx} y(x) + g(x) y(x) = 0 . \tag{20}$$

Terdapat syarat Fuchs untuk persamaan differensial (20) bahwa jika $x f(x)$ dan $x^2 g(x)$ dapat diuraikan dalam deret pangkat yang konvergen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, maka persamaan differensial (20) reguler di titik origin, yaitu tidak memiliki singularitas esensial di titik origin. Teorema Fuchs menyatakan bahwa apabila persamaan differensial (20) reguler di titik origin, dengan kata lain memenuhi syarat Fuchs, solusi umumnya terdiri dari:

1. dua deret Frobenius $S_1(x)$ dan $S_2(x)$, atau
2. satu deret Frobenius $S_1(x)$ dan satu lagi berbentuk $S_1(x) \ln x + S_2(x)$, dengan $S_2(x)$ deret Frobenius lain.