Catatan Fisika Matematika 3

Materi 6

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.587 – p.598

A. Persamaan Bessel dan fungsi Bessel jenis pertama

Persamaan Bessel diberikan sebagai:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \tag{1}$$

atau

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(x^2-p^2)y=0\,, \tag{2}$$

dengan p bilangan bulat maupun riil. Solusi $y(x)$ persamaan Bessel dapat dicari dengan menggunakan metode Frobenius:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1} \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}\,. \tag{5}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
&x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s)(n+s-1)+n+s-p^2\right]a_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}=0\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s)^2-p^2\right]a_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}=0\\
&\sum_{m=-2}^{\infty}\left[(m+s+2)^2-p^2\right]a_{m+2}x^{m+s+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}=0\,,\ (m=n-2)\\
&\sum_{n=-2}^{\infty}\left[(n+s+2)^2-p^2\right]a_{n+2}x^{n+s+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}=0\,,\ (n=m)\\
&(s^2-p^2)a_0x^s+\left[(s+1)^2-p^2\right]a_1x^{s+1}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s+2)^2-p^2\right]a_{n+2}x^{n+s+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}=0$$

$$(s^2-p^2)a_0x^s+\left[(s+1)^2-p^2\right]a_1x^{s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+s+2)^2-p^2\right]a_{n+2}+a_n\right\}x^{n+s+2}=0 \tag{6}$$

Anggaplah $a_0\neq 0$. Suku x^s harus nol, berarti:

$$(s^2-p^2)=0\to s=\pm p\,. \tag{7}$$

Dengan $s=\pm p$, suku x^{s+1} juga harus nol, berarti:

$$\left[(s+1)^2-p^2\right]a_1=(1\pm 2p)a_1=0\to a_1=0\,. \tag{8}$$

Suku x^{n+s+2} juga harus nol, berarti:

$$\begin{aligned}\left[(n\pm p+2)^2-p^2\right]a_{n+2}+a_n=0&\\ \to a_{n+2}&=-\frac{1}{(n\pm p+2)^2-p^2}a_n\\ \to a_n&=-\frac{1}{(n\pm p)^2-p^2}a_{n-2}\\ &=-\frac{1}{n(n\pm 2p)}a_{n-2}\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Karena $a_1=0$, maka menurut relasi rekursi (9) semua $a_{\text{ganjil}}=0$ dan deret hanya terdiri dari suku n genap, sehingga relasi rekursi (9) dapat ditulis menjadi:

$$a_{2n}=-\frac{1}{4n(n\pm p)}a_{2(n-1)}\,,\ (n=0,1,2,3,...)\,. \tag{10}$$

Untuk kasus $s=p$ diperoleh:

$$\begin{aligned}a_{2n}&=(-1)\frac{1}{4n(n+p)}a_{2(n-1)}\\ &=(-1)\frac{1}{4n(n+p)}(-1)\frac{1}{4(n-1)(n+p-1)}a_{2(n-2)}\\ &=(-1)\frac{1}{4n(n+p)}(-1)\frac{1}{4(n-1)(n+p-1)}(-1)\frac{1}{4(n-2)(n+p-2)}a_{2(n-3)}\\ &=(-1)\frac{1}{4n(n+p)}(-1)\frac{1}{4(n-1)(n+p-1)}(-1)\frac{1}{4(n-2)(n+p-2)}...(-1)\frac{1}{4(p+1)}a_0\\ &=\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{n(n-1)(n-2)...1}\frac{1}{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)...(p+1)}a_0\\ &=(-1)^n\frac{p!}{4^nn!(n+p)!}a_0\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Dalam fungsi Gamma, persamaan (11) dinyatakan sebagai:

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{\Gamma(p+1)}{4^n\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)}a_0\,. \tag{12}$$

Solusi persamaan Bessel untuk $s = p$ diperoleh sebagai:

$$y(x) = a_0 p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!(n+p)!} x^{2n+p} = a_0 \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} x^{2n+p} . \tag{13}$$

Mengingat $2^2 = 4$, solusi $y(x)$ dapat ditulis menjadi:

$$y(x) = a_0 p! 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = a_0 \Gamma(p+1) 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} . \tag{14}$$

Fungsi Bessel jenis pertama orde p, $J_p(x)$, adalah salah satu solusi $y(x)$ dengan a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2^p p!} = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} , \tag{15}$$

yaitu:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} . \tag{16}$$

B. Solusi kedua persamaan Bessel

Solusi kedua persamaan Bessel yaitu dengan $s = -p$. Diperoleh:

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} . \tag{17}$$

Perhatikan kasus khusus berikut, yaitu apabila p bilangan bulat. Untuk $n < p$, $n - p$ bernilai negatif, sehingga $\Gamma(n-p+1)$ bernilai tak berhingga (ingat fungsi Gamma untuk argumen negatif) dan suku-suku untuk $n < p$ nol. Dengan demikian, untuk p bilangan bulat secara efektif berlaku:

$$\begin{aligned} J_{-p}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} , \ (p = \text{ bilangan bulat}) \\ &= (-1)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+p)!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} = (-1)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+p+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} , \ (m = n-p) \\ &= (-1)^p J_p(x) . \end{aligned} \tag{18}$$

Dengan demikian, khusus untuk p bilangan bulat, $J_{-p}(x)$ tidak dapat dinyatakan sebagai solusi kedua, karena tidak bebas berdiri sendiri, melainkan sebanding dengan $J_p(x)$. Untuk p bukan bilangan bulat, $J_{-p}(x)$ tidak sebanding dengan $J_p(x)$, sehingga dapat dipakai sebagai solusi kedua. Secara umum, sebagai solusi kedua persamaan Bessel, yaitu fungsi Bessel jenis kedua $N_p(x)$ atau $Y_p(x)$, orang menggunakan kombinasi linier $J_p(x)$ dan $J_{-p}(x)$:

$$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)} . \tag{19}$$

Solusi umum persamaan Bessel menjadi kombinasi linier $J_p(x)$ dan $N_p(x)$ (atau $Y_p(x)$):

$$y(x) = A J_p(x) + B N_p(x) . \tag{20}$$

Sekedar pembanding, contoh persamaan lain yang sudah kita kenal, yaitu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0\,. \tag{21}$$

Dua solusi persamaan (21) adalah $\sin kx$ dan $\cos kx$. Dengan demikian, solusi umum adalah:

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx\,. \tag{22}$$

Namun, bisa juga kita dapatkan:

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx = (A - C) \sin kx + C \sin kx + B \cos kx = D \sin kx + G g(x)\,, \tag{23}$$

dengan $D = A - C$ dan

$$g(x) = \frac{1}{G}(C \sin kx + B \cos kx)\,. \tag{24}$$

Dalam hal ini, dua solusi persamaan (21) yang dipakai bukanlah $\sin kx$ dan $\cos kx$, melainkan $\sin kx$ dan $g(x)$.

C. Relasi rekursi

Beberapa relasi rekursi fungsi Bessel diberikan sebagai berikut, yang berlaku baik bagi $J_p(x)$ maupun $N_p(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x) \tag{25}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -\,x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{26}$$

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) \tag{27}$$

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x) \tag{28}$$

$$J_p'(x) = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)\,. \tag{29}$$

D. Persamaan differensial dengan solusi fungsi Bessel

Persamaan differensial dengan bentuk umum seperti berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2a}{x}\frac{dy}{dx} + \left[\left(bcx^{c-1}\right)^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right] y = 0 \tag{30}$$

memiliki solusi yang dinyatakan dalam fungsi Bessel sebagai berikut:

$$y(x) = x^a Z_p\left(bx^c\right)\,, \tag{31}$$

dengan Z_p adalah J_p atau N_p atau kombinasi keduanya. Contoh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9xy = 0\,. \tag{32}$$

Jika kita bandingkan persamaan (32) dan (30), kita dapatkan:

$$1 - 2a = 0 \to a = \frac{1}{2}\,, \tag{33}$$

$$(bc)^2 = 9\,,\ 2(c-1) = 1 \to c = \frac{3}{2}\,,\ b = 2\,, \tag{34}$$

$$a^2 - p^2c^2 = 0 \to p = \frac{1}{3}\,. \tag{35}$$

Dengan demikian, solusi umum persamaan (32) adalah:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right) = x^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right) + BN_{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)\right]\,. \tag{36}$$

Untuk $a = 0\,,\ c = 1$, persamaan (30) menjadi sedikit saja berbeda dari persamaan Bessel (1) atau (2), yaitu:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (b^2x^2 - p^2)y = 0 \tag{37}$$

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (b^2x^2 - p^2)y = 0\,, \tag{38}$$

dengan solusi umum:

$$y(x) = Z_p(bx) = AJ_p(bx) + BN_p(bx)\,. \tag{39}$$

E. Jenis-jenis lain fungsi Bessel

Beberapa fungsi lain juga disebut fungsi Bessel atau berhubungan dengan fungsi Bessel.

- Fungsi Hankel atau fungsi Bessel jenis ketiga:

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x) \tag{40}$$

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x)\,. \tag{41}$$

  Fungsi Hankel jelas memenuhi persamaan (1) atau (2).

- Fungsi Bessel hiperbolik atau termodifikasi:

$$I_p(x) = i^{-p}J_p(ix) \tag{42}$$

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2}i^{p+1}H_p^{(1)}(ix)\,. \tag{43}$$

  Fungsi Bessel hiperbolik atau termodifikasi memenuhi persamaan (37) atau (38), dengan $b = i$:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2)y = 0 \tag{44}$$

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - (x^2 + p^2)y = 0\,. \tag{45}$$

- Fungsi Bessel bola (sferis) berhubungan dengan fungsi Bessel orde kelipatan ganjil dari setengah (*half-odd*), $p = (2n+1)/2\,,\ n =$ bilangan bulat:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(2n+1)/2}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right) \tag{46}$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{(2n+1)/2}(x) = -x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right) \tag{47}$$

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x) \tag{48}$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x)\,. \tag{49}$$

- Contoh fungsi Kelvin diberikan sebagai berikut:

$$y(x) = Z_0\left(i^{3/2}x\right)\,, \tag{50}$$

yang memenuhi persamaan differensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - iy = 0\,. \tag{51}$$

Sebagai fungsi kompleks, $Z_0\left(i^{3/2}x\right)$ juga dinyatakan dalam komponen riil dan komponen imajinernya. Apabila $Z_0 = J_0$, dikenal fungsi ber (*Bessel-real*) dan bei (*Bessel-imaginary*):

$$J_0\left(i^{3/2}x\right) = \mathrm{Re}\, J_0\left(i^{3/2}x\right) + i\, \mathrm{Im}\, J_0\left(i^{3/2}x\right) = \mathrm{ber}\, x + i\, \mathrm{bei}\, x\,. \tag{52}$$

Kita ingat bahwa fungsi Bessel hiperbolik dengan argumen x adalah fungsi Bessel dengan argumen ix. Dengan demikian, fungsi Kelvin dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y(x) = Z_0\left(i^{1/2}ix\right) = Z_0^{(hyp)}\left(i^{1/2}x\right)\,, \tag{53}$$

dengan $Z_0^{(hyp)}$ merupakan fungsi Bessel hiperbolik orde 0, yang tetap memenuhi persamaan yang sama, yaitu persamaan (51). Contoh, $Z_0^{(hyp)} = K_0$, maka dikenal fungsi ker dan kei sebagai berikut:

$$K_0\left(i^{1/2}x\right) = \mathrm{Re}\, K_0\left(i^{1/2}x\right) + i\, \mathrm{Im}\, K_0\left(i^{1/2}x\right) = \mathrm{ker}\, x + i\, \mathrm{kei}\, x\,. \tag{54}$$

- Persamaan differensial Airy diberikan sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \tag{55}$$

dan solusinya adalah:

$$y(x) = \sqrt{x} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3} i x^{3/2}\right)\,. \tag{56}$$

Karena merupakan fungsi kompleks, $y(x)$ dapat dinyatakan dalam fungsi Bessel biasa dengan argumen ix atau dalam fungsi Bessel hiperbolik $I_{1/3}$ dan $K_{1/3}$ dengan argumen x. Fungsi Airy didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \tag{57}$$

$$\mathrm{Bi}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]\,. \tag{58}$$