Catatan Fisika Matematika 3

Materi 5

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.575 – p.587

A. Fungsi ortogonal

Dua vektor **A** dan **B** dinyatakan ortogonal (saling tegak lurus) apabila perkalian skalar (*scalar product*) atau perkalian titik (*dot product*) kedua vektor tersebut atau proyeksi vektor **B** pada vektor **A** berikut ini bernilai nol:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0\,. \tag{1}$$

Sifat ortogonal juga dimiliki oleh fungsi-fungsi tertentu. Dalam hal ini, kita tidak perlu membayangkan atau mempertanyakan arah fungsi tersebut, sebagaimana kita membayangkan arah vektor. Sifat ortogonal fungsi ditunjukkan oleh operasi yang serupa dengan operasi vektor pada persamaan (1). Dua fungsi $A(x)$ dan $B(x)$ dinyatakan ortogonal pada interval (a, b) apabila menunjukkan integral berikut:

$$\int_a^b dx\, A^*(x)B(x) = 0\,. \tag{2}$$

Apabila $A(x)$ fungsi riil, tentu saja $A^*(x) = A(x)$. Operasi pada persamaan (2) sering dinyatakan juga sebagai perkalian skalar fungsi $A(x)$ dan $B(x)$ atau proyeksi fungsi $B(x)$ pada fungsi $A(x)$. Contoh, $\sin x$ dan $\cos x$ saling tegak lurus pada interval $(-\pi/2, \pi/2)$ atau $(0, \pi)$ atau sembarang interval yang panjangnya π:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, \sin x\cos x = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, \sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{4}(-1+1) = 0\,. \tag{3}$$

$$\int_0^{\pi} dx\, \sin x\cos x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx\, \sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x|_0^{\pi} = -\frac{1}{4}(1-1) = 0\,. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\int_{\phi}^{\phi+\pi} dx\, \sin x\cos x = \frac{1}{2}\int_{\phi}^{\phi+\pi} dx\, \sin 2x &= -\frac{1}{4}\cos 2x|_{\phi}^{\phi+\pi} \\ = -\frac{1}{4}(\cos(2\phi+2\pi) - \cos 2\phi) &= -\frac{1}{4}(\cos 2\phi - \cos 2\phi) = 0\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Jika fungsi $A(x)$ dan $B(x)$ ortogonal pada interval (a, b), tidak berarti pada interval lain keduanya juga ortogonal. Contoh, $\sin x$ dan $\cos x$ pada interval $(0, \pi/2)$ tidak ortogonal:

$$\int_0^{\pi/2} dx\, \sin x\cos x = -\frac{1}{4}\cos 2x|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

B. Himpunan lengkap fungsi ortogonal

Kita kenal vektor satuan (*unit vector*) $\hat{\mathbf{e}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, yang semuanya saling tegak lurus:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{i,j} \,. \tag{7}$$

Contoh vektor satuan adalah $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$ dalam koordinat cartesian. Vektor satuan $\hat{\mathbf{e}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ tersebut membentuk satu himpunan vektor ortogonal (*a set of orthogonal vectors*). Lebih dari itu, vektor satuan $\hat{\mathbf{e}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ cukup untuk menyatakan sembarang vektor:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{\mathbf{e}}_i \,. \tag{8}$$

Dengan mengubah-ubah A_i orang dapat membuat sembarang bermacam-macam vektor, yang jumlah variasinya tak berhingga. Dikatakan bahwa semua vektor dapat dinyatakan dalam $\hat{\mathbf{e}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Dengan demikian, tiga vektor satuan tersebut membentuk satu himpunan lengkap vektor ortogonal (*a complete set of orthogonal vectors*). Hanya dua vektor satuan tidak cukup (tidak lengkap), namun lebih dari tiga juga tidak diperlukan. Untuk fungsi dikenal juga satu himpunan lengkap fungsi ortogonal (*a complete set of orthogonal functions*). Contoh (ingat kembali ekspansi / deret Fourier, Boas bab 7), pada interval $(-\pi, \pi)$ atau sembarang interval yang panjangnya 2π, dengan n bilangan bulat, fungsi $\sin nx$ dengan ortogonalitas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin nx \sin mx = \begin{cases} 0 & , \ (n \neq m) \\ \pi & , \ (n = m \neq 0) \end{cases} \tag{9}$$

dapat dipakai untuk menyatakan sembarang fungsi ganjil (antisimetrik) $f^{(-)}(x)$ pada interval yang sama:

$$f^{(-)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \,, \tag{10}$$

juga fungsi $\cos nx$, dengan ortogonalitas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos nx \cos mx = \begin{cases} 0 & , \ (n \neq m) \\ \pi & , \ (n = m \neq 0) \\ 2\pi & , \ (n = m = 0) \end{cases} \tag{11}$$

dapat dipakai untuk menyatakan sembarang fungsi genap (simetrik) $f^{(+)}(x)$ pada interval yang sama:

$$f^{(+)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \,, \tag{12}$$

serta fungsi e^{inx}, dengan ortogonalitas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-inx} e^{imx} = \begin{cases} 0 & , \ (n \neq m) \\ 2\pi & , \ (n = m) \end{cases} \tag{13}$$

dapat dipakai untuk menyatakan sembarang fungsi $f(x)$ pada interval yang sama:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \,. \tag{14}$$

Dalam hal ini, ada dua sifat yang sama yang dimiliki himpunan vektor satuan $\hat{\mathbf{e}}_i$ dan himpunan fungsi $\sin nx$, $\cos nx$, e^{inx}, yaitu: (1) ortogonal dan (2) lengkap. Dengan dua sifat ini, himpunan vektor satuan $\hat{\mathbf{e}}_i$ dan himpunan fungsi $\sin nx$, $\cos nx$, e^{inx} dapat dipakai sebagai basis untuk menyatakan sembarang vektor, sembarang fungsi (dengan sifat tertentu) pada suatu interval. Dua sifat tersebut menjadi syarat suatu basis.

Kini, bandingkan persamaan-persamaan (8), (10), (12), dan (14). Jika untuk vektor berlaku ruang berdimensi 3, untuk fungsi dapat berlaku ruang dengan jumlah dimensi sembarang, lebih dari 3, bahkan tak berhingga. Ruang seperti itu tentu tak dapat dan tak perlu dibayangkan, namun kita tetap dapat melakukan perhitungan dan operasi matematis dalam ruang seperti itu.

C. Norm fungsi

Sebuah vektor $\mathbf{A}$ memiliki norm atau nilai atau besar $|\mathbf{A}|$, yang dapat dicari dari perkalian skalar vektor $\mathbf{A}$ dan dirinya sendiri:

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \rightarrow |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\,. \tag{15}$$

Untuk mendapatkan vektor $\hat{\mathbf{e}}_A$ yang arahnya searah $\mathbf{A}$, namun memiliki norm 1, kita dapat lakukan sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{e}}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}}\,. \tag{16}$$

Seperti vektor, sebuah fungsi juga dapat memiliki norm. Norm $|N|$ fungsi $A(x)$ pada interval (a, b) diperoleh sebagai berikut:

$$|N|^2 = \int_a^b dx\, A^*(x)A(x) \rightarrow |N| = \sqrt{\int_a^b dx\, A^*(x)A(x)}\,. \tag{17}$$

Jika pada persamaan (17) $|N| \neq 1$, fungsi $A(x)$ disebut tak ternormalisasi, karena fungsi yang ternormalisasi memiliki norm sama dengan 1. Fungsi $A(x)$ dapat dinormalisasi, sehingga norm-nya sama dengan 1, dengan cara membaginya dengan norm-nya semula:

$$\frac{1}{|N|}A(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{\int_a^b dx\, A^*(x)A(x)}}\,, \tag{18}$$

sehingga

$$\int_a^b dx\, \frac{1}{|N|}A^*(x)\frac{1}{|N|}A(x) = \frac{1}{|N|^2}\int_a^b dx\, A^*(x)A(x) = 1\,. \tag{19}$$

Pada persamaan (18), $|N|^{-1}$ disebut konstanta normalisasi. Contoh, fungsi $u_n(x)$ pada interval $(-\pi, \pi)$ berikut ini tak ternormalisasi:

$$u_n(x) = \sin nx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dx\, u_n^*(x)u_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin^2 nx = \pi\,. \tag{20}$$

Untuk membuat $u_n(x)$ ternormalisasi, kita beri konstanta normalisasi $\pi^{-\frac{1}{2}}$:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dx\, u_n^*(x)u_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin^2 nx = 1\,. \tag{21}$$

Sebagai basis, fungsi $u_n(x)$ yang ternormalisasi serupa dengan vektor satuan $\hat{\mathbf{e}}_i$. Pada aplikasi, lebih mudah menggunakan fungsi yang ternormalisasi.

D. Ortogonalitas dan normalisasi polinomial Legendre, serta deret Legendre

Polinomial Legendre juga membentuk satu himpunan lengkap fungsi ortogonal pada interval $(-1, 1)$. Ortogonalitas dan sekaligus normalisasi polinomial Legendre, yang merupakan fungsi riil, diberikan sebagai berikut:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)P_m(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}\,. \tag{22}$$

Polinomial Legendre, dengan demikian, memang tak ternormalisasi.

Polinomial Legendre dapat dipakai sebagai basis untuk menyatakan sembarang fungsi $f(x)$ pada interval $(-1, 1)$. Deret Legendre untuk fungsi $f(x)$ diberikan sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)\,. \tag{23}$$

Koefisien deret Legendre c_l diperoleh dengan memanfaatkan sifat ortogonal polinomial Legendre:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)f(x) &= \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)P_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{2}{2l+1}\delta_{lm} \\
&= c_l \frac{2}{2l+1} \\
\rightarrow c_l &= \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)f(x)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

Sekedar untuk perbandingan, kita gunakan polinomial Legendre yang ternormalisasi, sebut saja $A_l(x)$. Sesuai persamaan (22), $A_l(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x)\,, \tag{25}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx\, A_l(x)A_m(x) &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)P_m(x) \\
&= \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\frac{2}{2l+1}\delta_{lm} \\
&= \frac{2l+1}{2}\frac{2}{2l+1}\delta_{lm} \\
&= \delta_{lm}\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

Fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam dalam deret $A_l(x)$ sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l A_l(x)\,, \tag{27}$$

dengan koefisien w_l diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx\, A_l(x) f(x) &= \int_{-1}^{1} dx\, A_l(x) \sum_{m=0}^{\infty} w_m A_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} w_m \int_{-1}^{1} dx\, A_l(x) A_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} w_m \delta_{lm} \\
&= w_l \\
\rightarrow w_l &= \int_{-1}^{1} dx\, A_l(x) f(x)\,. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Kita lihat, dengan menggunakan basis yang ternormalisasi, koefisien deret dihitung secara lebih sederhana.

Contoh:

- Ambillah fungsi $f(x)$ berikut:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , (-1 < x < 0) \\ 1 & , (0 < x < 1) \end{cases} \,. \tag{29}$$

Dapat dilihat bahwa $f(x)$ fungsi ganjil. Deret Legendre untuk $f(x)$ diberikan sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)\,, \tag{30}$$

dengan koefisien c_l diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_l &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x) f(x) \\
&= \frac{2l+1}{2} \left(-\int_{-1}^{0} dx\, P_l(x) + \int_{0}^{1} dx\, P_l(x) \right) \\
&= \frac{2l+1}{2} \left(-\int_{0}^{1} dy\, P_l(-y) + \int_{0}^{1} dx\, P_l(x) \right) , \ (y = -x) \\
&= \frac{2l+1}{2} \int_{0}^{1} dx\, \left(P_l(x) - P_l(-x) \right) . \qquad (31)
\end{aligned}$$

Ingat kembali relasi simetri polinomial Legendre:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)\,. \tag{32}$$

Kita dapatkan c_l:

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\left(1-(-1)^l\right)\int_0^1 dx\, P_l(x)$$

$$\rightarrow c_{l=\text{genap}} = 0 \tag{33}$$

$$\rightarrow c_{l=\text{ganjil}} = (2l+1)\int_0^1 dx\, P_l(x)\,. \tag{34}$$

Dengan demikian, deret Legendre untuk fungsi $f(x)$ pada persamaan (29) hanya berisi suku dengan l ganjil dan koefisien deret c_l diberikan pada persamaan (34). Beberapa contoh c_l:

$$c_1 = 3\int_0^1 dx\, P_1(x) = 3\int_0^1 dx\, x = \frac{3}{2} \tag{35}$$

$$c_3 = 7\int_0^1 dx\, P_3(x) = \frac{21}{2}\int_0^1 dx\, x\left(\frac{5}{3}x^2 - 1\right) = -\frac{7}{8}\,. \tag{36}$$

- Ambillah $f(x)$ sembarang polinomial derajat m. Untuk $n > m$, hitunglah:

$$\int_{-1}^1 dx\, P_n(x) f(x)\,. \tag{37}$$

Karena $f(x)$ suatu polinomial derajat m, deret Legendre untuk $f(x)$ bukan deret tak berhingga, melainkan berhenti sampai suku $l = m$:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{m} c_l P_l(x)\,. \tag{38}$$

Dengan demikian:

$$\int_{-1}^1 dx\, P_n(x) f(x) = \sum_{l=0}^{m} c_l \int_{-1}^1 dx\, P_n(x) P_l(x) = \sum_{l=0}^{m} c_l \frac{2}{2n+1}\delta_{nl} = 0\,, \tag{39}$$

karena tidak ada nilai $l = n$.

E. Fungsi Legendre terasosiasi

Ada suatu fungsi yang terasosiasi (terhubungkan) dengan polinomial Legendre, disebut fungsi (atau juga polinomial) Legendre terasosiasi (*associated Legendre functions (polinomials)*) $P_l^m(x)$, yang didefinisikan sebaga berikut:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\,. \tag{40}$$

Polinomial Legendre terasosiasi memenuhi persamaan differensial berikut:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2x\frac{d}{dx}y(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0\,,\ (l = 0,1,2,\ldots,\ |m| \leqslant l)\,. \tag{41}$$

Tentu saja, ada bermacam $y(x)$ sebagai solusi persamaan differensial (41), masing-masing dengan syarat batasnya sendiri. Polinomial Legendre terasosiasi $P_l^m(x)$ hanya salah satu dari banyak $y(x)$ yang mungkin. Untuk $m = 0$, $P_l^m(x) = P_l(x)$, sehingga dapat dikatakan bahwa polinomial Legendre $P_l(x)$ adalah kasus khusus polinomial Legendre terasosiasi $P_l^m(x)$, yaitu untuk $m = 0$.

Untuk tiap nilai m, $P_l^m(x)$ dengan semua nilai l yang mungkin membentuk satu himpunan lengkap fungsi ortogonal pada interval $(-1, 1)$. Demikian pula, untuk tiap nilai l, $P_l^m(x)$ dengan semua nilai m yang mungkin membentuk satu himpunan lengkap fungsi ortogonal pada interval $(-1, 1)$. Ortogonalitas dan normalisasi $P_l^m(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_{l'}^{m'}(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l} \delta_{m'm}\,. \tag{42}$$

Jika kita masukkan rumus Rodrigues untuk polinomial Legendre $P_l(x)$ ke persamaan (40), kita dapatkan rumus Rodrigues untuk polinomial Legendre terasosiasi $P_l^m(x)$ sebagai berikut:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l\,. \tag{43}$$

Dari operator differensial pada persamaan (43) dapat kita lihat juga bahwa nilai terkecil m adalah $-l$ dan nilai terbesar m adalah l, karena $(x^2-1)^l$ polinomial derajat $2l$, sehingga $-l \leqslant m \leqslant l$ atau $|m| \leqslant l$. Lebih detil, nilai-nilai m adalah $-l, -(l-1), -(l-2), ..., l-2, l-1, l$. Dari persamaam (43) dapat diperoleh juga relasi simetri untuk $P_l^m(x)$:

$$\begin{aligned} P_l^m(-x) &= \frac{1}{2^l l!}(1-(-x)^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d(-x)^{l+m}}((-x)^2-1)^l \\ &= (-1)^{l+m} \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^{l+m} P_l^m(x)\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Dengan menggunaan rumus Rodrigues (43) dan juga aturan Leibniz kita peroleh relasi antara $P_l^{-m}(x)$ dan $P_l^m(x)$ (lihat Boas, problem 7 dan 8):
Untuk $n \leqslant l$:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(x \pm 1)^l &= l \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x \pm 1)^{l-1} \\ &= l(l-1) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x \pm 1)^{l-2} \\ &= l(l-1)(l-2) \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(x \pm 1)^{l-3} \\ &= ... \\ &= l(l-1)...(l-n+1)(x \pm 1)^{l-n} \\ &= \frac{l!}{(l-n)!}(x \pm 1)^{l-n}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l &= \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x-1)^l (x+1)^l \\ &= \sum_{n=0}^{l+m} \left(\begin{array}{c} l+m \\ n \end{array} \right) \left(\frac{d^{l+m-n}}{dx^{l+m-n}}(x-1)^l \right) \left(\frac{d^n}{dx^n}(x+1)^l \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=m}^{l} \begin{pmatrix} l+m \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{d^{l+m-n}}{dx^{l+m-n}} (x-1)^l \right) \left(\frac{d^n}{dx^n} (x+1)^l \right) \text{ , (batas efektif } n) \\
&= \sum_{n=m}^{l} \begin{pmatrix} l+m \\ n \end{pmatrix} \frac{l!}{(-m+n)!} (x-1)^{-m+n} \frac{l!}{(l-n)!} (x+1)^{l-n} \\
&= \sum_{n=m}^{l} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (l+m-i) \frac{l!}{(-m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^{-m+n} (x+1)^{l-n} \\
&= \sum_{n=m}^{l} \frac{1}{n!} \frac{(l+m)!}{(l+m-n)!} \frac{l!}{(-m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^{-m+n} (x+1)^{l-n} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m} \frac{1}{(m+k)!} \frac{(l+m)!}{(l-k)!} \frac{l!}{k!} \frac{l!}{(l-m-k)!} (x-1)^k (x+1)^{l-m-k} \text{ , } (k=n-m) \\
&= \sum_{n=0}^{l-m} \frac{1}{n!} \frac{(l+m)!}{(l-m-n)!} \frac{l!}{(m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^n (x+1)^{l-m-n} \text{ , } (n=k) \, . \qquad (46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l &= \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x-1)^l (x+1)^l \\
&= \sum_{n=0}^{l-m} \begin{pmatrix} l-m \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{d^{l-m-n}}{dx^{l-m-n}} (x-1)^l \right) \left(\frac{d^n}{dx^n} (x+1)^l \right) \\
&= \sum_{n=0}^{l-m} \begin{pmatrix} l-m \\ n \end{pmatrix} \frac{l!}{(m+n)!} (x-1)^{m+n} \frac{l!}{(l-n)!} (x+1)^{l-n} \\
&= \frac{l!}{m!} (x-1)^m (x+1)^l \\
&\quad + \sum_{n=1}^{l-m} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (l-m-i) \frac{l!}{(m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^{m+n} (x+1)^{l-n} \\
&= \frac{l!}{m!} (x-1)^m (x+1)^l \\
&\quad + \sum_{n=1}^{l-m} \frac{1}{n!} \frac{(l-m)!}{(l-m-n)!} \frac{l!}{(m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^{m+n} (x+1)^{l-n} \\
&= \sum_{n=0}^{l-m} \frac{1}{n!} \frac{(l-m)!}{(l-m-n)!} \frac{l!}{(m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^{m+n} (x+1)^{l-n} \\
&= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (x-1)^m (x+1)^m \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{l-m} \frac{1}{n!} \frac{(l+m)!}{(l-m-n)!} \frac{l!}{(m+n)!} \frac{l!}{(l-n)!} (x-1)^n (x+1)^{l-m-n} \\
&= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (x^2-1)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \, . \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
P_l^{-m}(x) &= \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \\
&= \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (x^2-1)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l
\end{aligned}
$$

$$= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$
$$= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \,. \qquad (48)$$

F. Deret pangkat diperumum atau metode Frobenius

Kita sudah lihat dalam materi sebelum ini metode deret sebagai salah satu cara mencari solusi persamaan differensial. Namun, metode tersebut masih memiliki keterbatasan. Kini, kita lihat metode deret yang lebih umum, disebut metode Frobenius. Menurut metode Frobenius, solusi deret yang dipakai berbentuk:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \,. \qquad (49)$$

Contoh, kita cari solusi persamaan differensial berikut:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \,. \qquad (50)$$

Gunakan solusi deret:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \qquad (51)$$
$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} \qquad (52)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2} \,. \qquad (53)$$

Diperoleh:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+s)(n+s-1) + 4(n+s) + 2\right] a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+s)(n+s+3) + 2\right] a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s+2)(n+s+1) a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0$$
$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+s+4)(m+s+3) a_{m+2} x^{m+s+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0 \,, \; (m = n-2)$$
$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+s+4)(n+s+3) a_{n+2} x^{n+s+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0 \,, \; (n = m)$$
$$(s+2)(s+1) a_0 x^s + (s+3)(s+2) a_1 x^{s+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s+4)(n+s+3)a_{n+2}x^{n+s+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s+2}=0$$

$$(s+2)(s+1)a_0x^s+(s+3)(s+2)a_1x^{s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s+4)(n+s+3)a_{n+2}+a_n\right]x^{n+s+2}=0 \quad (54)$$

Anggaplah $a_0 \neq 0$. Suku x^s harus nol, berarti:

$$(s+2)(s+1)=0 \rightarrow s=-2 \;\&\; -1\,. \quad (55)$$

Ada dua kasus:

1. $s=-1$: Suku x^s nol, suku x^{s+1} juga harus nol, berarti:

$$(s+3)(s+2)a_1=2a_1=0 \rightarrow a_1=0\,. \quad (56)$$

Suku x^{n+s+2} juga harus nol, berarti:

$$(n+3)(n+2)a_{n+2}+a_n=0 \rightarrow a_{n+2}=-\frac{1}{(n+3)(n+2)}a_n\,. \quad (57)$$

Karena $a_1=0$, maka menurut relasi rekursi (57) semua $a_{\text{ganjil}}=0$ dan deret hanya terdiri dari suku n genap.

Relasi rekursi (57) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= -\frac{1}{(n+3)(n+2)}a_n \rightarrow a_n=-\frac{1}{(n+1)n}a_{n-2}\\
a_n &= (-1)\frac{1}{(n+1)n}a_{n-2}\\
&= (-1)\frac{1}{(n+1)n}(-1)\frac{1}{(n-1)(n-2)}a_{n-4}\\
&= (-1)\frac{1}{(n+1)n}(-1)\frac{1}{(n-1)(n-2)}(-1)\frac{1}{(n-3)(n-4)}a_{n-6}\\
&= (-1)\frac{1}{(n+1)n}(-1)\frac{1}{(n-1)(n-2)}(-1)\frac{1}{(n-3)(n-4)}...(-1)\frac{1}{3\cdot 2}a_0\\
&= (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)...3\cdot 2}a_0\\
&= (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)...3\cdot 2\cdot 1}a_0\\
&= (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{a_0}{(n+1)!}\,. \quad (58)
\end{aligned}$$

Solusi persamaan differensial menjadi:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=\text{genap}} a_n x^{n-1}\\
&= a_0\sum_{n=\text{genap}}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(n+1)!}x^{n-1}\\
&= a_0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m-1}\,,\ (n=2m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{x}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m} \\
&= \frac{a_0}{x^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} \\
&= \frac{a_0}{x^2}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...\right) \\
&= \frac{a_0}{x^2}\sin x\,. \qquad (59)
\end{aligned}
$$

2. $s=-2$: Suku x^s nol, suku x^{s+1} nol, berarti selain $a_0 \neq 0$, juga $a_1 \neq 0$. Suku x^{n+s+2} juga harus nol, berarti:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0 \rightarrow a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n\,. \qquad (60)$$

Untuk kasus ini, karena $a_0 \neq 0$ dan $a_1 \neq 0$, maka deret terdiri dari baik suku n genap maupun ganjil.

Relasi rekursi (60) dapat disederhanakan menjadi:

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &= -\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n \rightarrow a_n=-\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} \\
a_n &= (-1)\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} \\
&= (-1)\frac{1}{n(n-1)}(-1)\frac{1}{(n-2)(n-3)}a_{n-4} \\
&= (-1)\frac{1}{n(n-1)}(-1)\frac{1}{(n-2)(n-3)}(-1)\frac{1}{(n-4)(n-5)}a_{n-6} \\
&= (-1)\frac{1}{n(n-1)}(-1)\frac{1}{(n-2)(n-3)}(-1)\frac{1}{(n-4)(n-5)}...(-1)\begin{cases}\frac{1}{2\cdot 1}a_0 \\ \frac{1}{3\cdot 2}a_1\end{cases} \\
&= \frac{1}{n!}\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}a_0 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}a_1\end{cases}\,. \qquad (61)
\end{aligned}
$$

Solusi persamaan differensial menjadi:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=\text{genap}} a_n x^{n-2} + \sum_{n=\text{ganjil}} a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}x^{2m-1} \\
&= a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m-2} + a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m-1} \\
&= a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m-2} + a_1\sum_{m=0}^{\infty}x\frac{(-1)^m}{(2m+1)(2m)!}x^{2m-2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(a_0+\frac{1}{2m+1}a_1x\right)\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m-2}\,. \qquad (62)
\end{aligned}
$$