Catatan Fisika Matematika 3

Materi 4

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.567 – p.575

A. Deret binomial

Menurut ekspansi binomial, $(a+b)^p$ dapat dihitung sebagai deret binomial berikut (lihat Boas p.28 – p.29):

$$(a+b)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} a^{p-n} b^n \,, \tag{1}$$

dengan koefisien binomial:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & , \ (n=0) \\ \frac{1}{n!} \prod\limits_{i=0}^{n-1} (p-i) & , \ (n>0) \end{cases} \tag{2}$$

dan p bilangan bulat maupun riil, positif maupun negatif. Khusus untuk p bilangan bulat positif, deret binomial tidak tak berhingga, melainkan berhenti sampai suku ke-$n = p$, karena untuk $n > p$ koefisien binomial bernilai nol. Beberapa contoh untuk p bilangan bulat:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{3}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 \,. \tag{4}$$

B. Aturan Leibniz untuk menghitung turunan suatu perkalian dua fungsi

Menurut aturan Leibniz, turunan suatu perkalian dua fungsi $f(x)g(x)$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\frac{d^p}{dx^p}(f(x)g(x)) = \sum_{n=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{d^{p-n}}{dx^{p-n}} f(x) \right) \left(\frac{d^n}{dx^n} g(x) \right) \,, \tag{5}$$

serupa dengan deret binomial, dengan koefisien yang sama, yaitu koefisien binomial, dan p bilangan bulat positif. Beberapa contoh:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4}(f(x)g(x)) = & \left(\frac{d^4}{dx^4} f(x) \right) g(x) + 4 \left(\frac{d^3}{dx^3} f(x) \right) \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) + 6 \left(\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} g(x) \right) \\ & + 4 \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} g(x) \right) + f(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} g(x) \right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5}{dx^5}(f(x)g(x)) = & \left(\frac{d^5}{dx^5} f(x) \right) g(x) + 5 \left(\frac{d^4}{dx^4} f(x) \right) \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) \\ & + 10 \left(\frac{d^3}{dx^3} f(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} g(x) \right) + 10 \left(\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} g(x) \right) \\ & + 5 \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \left(\frac{d^4}{dx^4} g(x) \right) + f(x) \left(\frac{d^5}{dx^5} g(x) \right) \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Pada beberapa kasus, deret pada persamaan (5) tidaklah sepanjang yang dibayangkan, yaitu apabila $f(x)$ atau $g(x)$ atau kedua-duanya hanya dapat diturunkan beberapa kali, kurang dari p. Contoh:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4}{dx^4}(xg(x)) &= \left(\frac{d^4}{dx^4}x\right)g(x) + 4\left(\frac{d^3}{dx^3}x\right)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right) + 6\left(\frac{d^2}{dx^2}x\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}g(x)\right) \\
&\quad + 4\left(\frac{d}{dx}x\right)\left(\frac{d^3}{dx^3}g(x)\right) + f(x)\left(\frac{d^4}{dx^4}g(x)\right) \\
&= 0 + 0 + 0 + 4\frac{d^3}{dx^3}g(x) + x\frac{d^4}{dx^4}g(x) \\
&= 4\frac{d^3}{dx^3}g(x) + x\frac{d^4}{dx^4}g(x) \qquad (8) \\
\frac{d^5}{dx^5}(f(x)(x^2+1)) &= \left(\frac{d^5}{dx^5}f(x)\right)(x^2+1) + 5\left(\frac{d^4}{dx^4}f(x)\right)\left(\frac{d}{dx}(x^2+1)\right) \\
&\quad + 10\left(\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}(x^2+1)\right) + 10\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)\left(\frac{d^3}{dx^3}(x^2+1)\right) \\
&\quad + 5\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\left(\frac{d^4}{dx^4}(x^2+1)\right) + f(x)\left(\frac{d^5}{dx^5}(x^2+1)\right) \\
&= \left(\frac{d^5}{dx^5}f(x)\right)(x^2+1) + 5\left(\frac{d^4}{dx^4}f(x)\right)(2x) + 10\left(\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right)2 + 0 + 0 + 0 \\
&= (x^2+1)\frac{d^5}{dx^5}f(x) + 10x\frac{d^4}{dx^4}f(x) + 20\frac{d^3}{dx^3}f(x) \qquad (9) \\
\frac{d^3}{dx^3}(x(x^2+1)) &= \left(\frac{d^3}{dx^3}x\right)(x^2+1) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}x\right)\left(\frac{d}{dx}(x^2+1)\right) \\
&\quad + 3\left(\frac{d}{dx}x\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}(x^2+1)\right) + x\left(\frac{d^3}{dx^3}(x^2+1)\right) \\
&= 3\left(\frac{d}{dx}x\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}(x^2+1)\right) \\
&= 6\,. \qquad (10)
\end{aligned}$$

C. Rumus Rodrigues

Polinomial Legendre $P_l(x)$ dapat juga diperoleh bukan dengan menyelesaikan persamaan Legendre, melainkan dengan menggunakan rumus Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,. \qquad (11)$$

(Perhatikan bahwa ada keliru ketik pada persamaan (4.1) di Boas, bukan 2^1, melainkan 2^l.) Rumus Rodrigues dapat dibuktikan, antara lain, dengan memanfaatkan aturan Leibniz (lihat Boas). Beberapa contoh:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0 = 1 \qquad (12)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dx^1}(x^2-1)^1 = \frac{1}{2}2x = x \qquad (13)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}4x(x^2-1) = \frac{1}{8}(12x^2-4) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad (14)$$

$$\begin{aligned}P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}6x(x^2-1)^2 = \frac{1}{48}\frac{d}{dx}6(x^2-1)(5x^2-1) \\ &= \frac{1}{48}12x(10x^2-6) = \frac{3}{2}x\left(\frac{5}{3}x^2-1\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Kita coba hitung $P_l(-x)$ dengan rumus Rodrigues:

$$P_l(-x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d(-x)^l}((-x)^2-1)^l = (-1)^l\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = (-1)^l P_l(x)\,. \tag{16}$$

Persamaan (16) menunjukkan sifat simetri polinomial Legendre. Untuk l genap, $P_l(x)$ merupakan fungsi genap (simetrik), sedangkan untuk l ganjil, $P_l(x)$ merupakan fungsi ganjil (antisimetrik).

D. Fungsi pembangkit dan relasi rekursi untuk polinomial Legendre

Fungsi $\Phi(x,h)$ berikut ini disebut fungsi pembangkit untuk polinomial Legendre $P_l(x)$:

$$\Phi(x,h) = (1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}\,,\;\; (|h|<1) \tag{17}$$

Fungsi $\Phi(x,h)$ dapat diekspansi dalam polinomial Legendre sebagai berikut:

$$\Phi(x,h) = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x)\,. \tag{18}$$

Dari $\Phi(x,h)$ dapat diturunkan beberapa relasi rekursi untuk polinomial Legendre (catatan: $P_l'(x) = \frac{d}{dx}P_l(x)$):

$$lP_l(x) = (2l-1)xP_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x) \tag{19}$$
$$lP_l(x) = xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) \tag{20}$$
$$lP_{l-1}(x) = P_l'(x) - xP_{l-1}'(x) \tag{21}$$
$$(2l+1)P_l(x) = P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) \tag{22}$$
$$(1-x^2)P_l'(x) = lP_{l-1}(x) - lxP_l(x) \tag{23}$$
$$(1-x^2)P_{l-1}'(x) = lxP_{l-1}(x) - lP_l(x)\,. \tag{24}$$

Dari relasi rekursi juga dapat diperoleh relasi rekursi yang lain. Contoh, persamaan (22) dapat juga diperoleh dari kombinasi persamaan (20) dan (21):

$$\begin{aligned} lP_l(x) &= xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) \\ (l+1)P_l(x) &= P_{l+1}'(x) - xP_l'(x) \\ \rightarrow (2l+1)P_l(x) &= P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Contoh:

- Sebuah muatan q_i berada di posisi $\mathbf{r}_i$. Jika k adalah konstanta Coulomb, potensial listrik V_i di posisi $\mathbf{R}$, dengan $R > r_i$ serta θ_i sudut antara $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{r}_i$, akibat muatan tersebut diperoleh sebagai deret dalam polinomial Legendre sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V_i &= kq_i \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \\ &= kq_i (R^2 - 2Rr_i \cos\theta_i + r_i^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= k\frac{q_i}{R}\left(1 - 2\frac{r_i}{R}\cos\theta_i + \frac{r_i^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= k\frac{q_i}{R}\Phi\left(\cos\theta_i, \frac{r_i}{R}\right) \\ &= k\frac{q_i}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_i}{R}\right)^l P_l(\cos\theta_i)\,. \end{aligned} \tag{26}$$

  Persamaan (26) merupakan contoh ekspansi multipol:

$$\begin{aligned} V_i &= k\frac{q_i}{R} + k\frac{q_i}{R}\frac{r_i}{R}P_1(\cos\theta_i) + k\frac{q_i}{R}\left(\frac{r_i}{R}\right)^2 P_2(\cos\theta_i) + ... \\ &= \frac{k}{R}q_i + \frac{k}{R^2}q_i r_i\cos\theta_i + \frac{k}{2R^3}q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1) + \ldots\,. \end{aligned} \tag{27}$$

  Suku pertama pada persamaan (27) menunjukkan potensial listrik akibat sebuah monopol (muatan) q_i, suku kedua akibat momen dipol $q_i r_i \cos\theta_i$, suku ketiga akibat momen kuadrupol $q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1)$, dan seterusnya.

- Apabila ada N muatan q_i di posisi $\mathbf{r}_i$, potensial listrik V di posisi yang jauh $\mathbf{R}$ diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{N} V_i \\ &= \frac{k}{R}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_i}{R}\right)^l P_l(\cos\theta_i) \\ &= \frac{k}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\frac{r_i}{R}\right)^l P_l(\cos\theta_i) \\ &= \frac{k}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{R^l}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^l P_l(\cos\theta_i) && (28) \\ &= \frac{k}{R}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{k}{R^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i\cos\theta_i + \frac{k}{2R^3}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1) + \ldots\,. && (29) \end{aligned}$$

  Suku pertama pada persamaan (29) menunjukkan potensial listrik akibat N monopol (muatan) q_i, suku kedua akibat N momen dipol $q_i r_i \cos\theta_i$, suku ketiga akibat N momen kuadrupol $q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1)$, dan seterusnya.

- Jika terdapat muatan yang banyak sekali dengan distribusi $\rho(\mathbf{r})$, muatan dq dalam daerah $\mathbf{r}$ sampai $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ adalah:

$$dq = \rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} \tag{30}$$

dan muatan total adalah:

$$\int dq = \int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \,. \tag{31}$$

Potensial listrik dV di posisi yang jauh $\mathbf{R}$ akibat muatan dq adalah:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{k}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^l} dq r^l P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{k}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^l} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^l P_l(\cos\theta) \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Potensial listrik V di posisi yang jauh $\mathbf{R}$ akibat seluruh muatan adalah:

$$\begin{aligned} V = \int dV &= \frac{k}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^l} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^l P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{k}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^l} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^l P_l(\cos\theta) && (33) \\ &= \frac{k}{R} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) + \frac{k}{R^2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r \cos\theta + \frac{k}{2R^3} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^2 (3\cos^2\theta - 1) + \ldots \,. && (34) \end{aligned}$$

Suku pertama pada persamaan (34) menunjukkan potensial listrik akibat monopol (muatan) total $\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})$, suku kedua akibat momen dipol total $\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) r\cos\theta$, suku ketiga akibat momen kuadrupol total $\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) r^2(3\cos^2\theta - 1)$, dan seterusnya.