Catatan Fisika Matematika 3

Materi 3

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.562 – p.567

Solusi persamaan differensial mungkin saja sulit dinyatakan sebagai fungsi-fungsi matematis yang kita kenal secara sederhana. Dalam hal ini, solusi persamaan differensial tersebut dinyatakan dalam bentuk deret. Persamaan differensial yang dibahas di sini merupakan persamaan differensial linier dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0\,. \tag{1}$$

Langkah-langkah untuk mendapatkan solusi persamaan differensial dalam bentuk deret tidak unik; orang dapat pakai cara-cara berbeda. Dalam catatan ini juga disampaikan cara yang agak berbeda dari yang disampaikan dalam buku Boas. Namun, ada prinsip sama yang dipakai, yang dijelaskan sebagai berikut. Jika kita punya deret:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,, \tag{2}$$

mengingat x bernilai sembarang, maka itu hanya dapat berarti bahwa $a = b = c = d = 0$.

A. Sebuah contoh solusi deret persamaan differensial

Ambillah persamaan differensial sederhana berikut, yang sebetulnya dapat dicari solusinya dengan mudah tanpa menggunakan solusi deret:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0\,. \tag{3}$$

Solusi non deret (lihat Boas) diperoleh sebagai $y(x) = a_0 e^{x^2}$. Langkah pencarian solusi deret sebagai berikut:

1. Kita anggap $y(x)$ berupa deret tak berhingga berikut:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \tag{4}$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{(n-1)}\,. \tag{5}$$

Kita masukkan ke persamaan differensial (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{(n-1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n+1)} = 0\,. \tag{6}$$

2. Kita coba untuk menyatukan kedua deret tersebut semaksimal mungkin. Untuk itu, mula-mula ekspresi pangkat x dibuat sama:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-2}^{\infty}(m+2)a_{m+2}x^{(m+1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{(n+1)} = 0\,,\ (n-1=m+1) \\ \rightarrow &\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{(n+1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{(n+1)} = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Pada langkah terakhir di atas, m dapat diganti dengan n, karena indeks m merupakan *dummy variable*, sehingga dapat diganti dengan nama yang lain.

3. Kita lihat deret di suku pertama secara efektif tidak dimulai dengan $n=-2$, melainkan dengan $n=-1$:

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{(n+1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{(n+1)} = 0\,. \tag{8}$$

4. Kita gabungkan bagian deret yang dapat digabungkan:

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{(n+1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{(n+1)} &= 0 \\ \rightarrow a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)a_{n+2} - 2a_n\right]x^{(n+1)} &= 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

5. Sesuai prinsip yang dijelaskan pada persamaan (2), kita dapatkan:

$$a_1 = 0 \tag{10}$$

dan relasi rekursi untuk koefisien deret a_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (n+2)a_{n+2} - 2a_n &= 0 \\ \rightarrow a_{n+2} &= \frac{2}{n+2}a_n\,. \end{aligned} \tag{11}$$

6. Solusi persamaan differensial (3) adalah:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\,, \tag{12}$$

dengan

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n \tag{13}$$

$$a_1 = 0 \tag{14}$$

$$a_0 = \text{sesuai syarat batas } (\textit{boundary conditions})\,. \tag{15}$$

Sampai di sini sebetulnya cukup. Tapi, kita masih dapat lanjutkan untuk mendapatkan ekspresi $y(x)$ yang lebih baik.

7. Deret $y(x)$ hanya berisi suku genap $n = 0, 2, 4, 6, ...$ Kita dapat ganti indeks n dengan indeks m, menurut $n = 2m$, sehingga $m = 0, 1, 2, 3, ...$ dan:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m}, \quad a_{2(m+1)} = \frac{1}{m+1} a_{2m}. \tag{16}$$

Kita evaluasi relasi rekursi:

$$\begin{aligned} a_{2(m+1)} &= \frac{1}{m+1} a_{2m} \\ \rightarrow a_{2m} &= \frac{1}{m} a_{2(m-1)} \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} a_{2(m-2)} \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} ... \frac{1}{2} a_2 \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} ... \frac{1}{2} \frac{1}{1} a_0 \\ &= \frac{1}{m(m-1)...2 \cdot 1} a_0 \\ &= \frac{1}{m!} a_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Dengan demikian,

$$y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{2m}. \tag{18}$$

Solusi deret pada persamaan (18) tersebut sesuai dengan solusi non deret, yaitu:

$$y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x^2)^m = a_0 e^{x^2}. \tag{19}$$

B. Persamaan Legendre

Persamaan Legendre diberikan sebagai berikut:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1) y = 0, \; (l = \text{konstan}). \tag{20}$$

Kita cari solusi deret untuk persamaan Legendre:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{(n-1)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} \\ \rightarrow (1 - x^2) &\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{(n-1)} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ &\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-n(n-1) - 2n + l(l+1) \right] a_n x^n = 0 \\ &\sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-n(n-1) - 2n + l(l+1) \right] a_n x^n = 0, \; (m = n-2) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[-n(n-1)-2n+l(l+1)\right]a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[-n(n-1)-2n+l(l+1)\right]a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[-n(n-1)-2n+l(l+1)\right]a_n\right\}x^n = 0$$
$$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[-n(n-1)-2n+l(l+1)\right]a_n = 0$$
$$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[l^2-n^2+l-n\right]a_n = 0\,,\ \text{(ingin ditulis ulang)}$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[(l-n)(l+n)+l-n\right]a_n = 0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (l-n)(l+n+1)a_n = 0 \tag{21}$$

Dengan demikian, solusi deret persamaan Legendre:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n\,. \tag{22}$$

Untuk mendapatkan solusi yang unik, harus diketahui 2 syarat batas, karena persamaan Legendre merupakan persamaan differensial orde 2. Dengan 2 syarat batas itu, misalkan, $y(0) = A$ dan $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = B$, diperoleh:

$$y(x)|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n|_{x=0} = a_0 = A \tag{23}$$
$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{(n-1)}|_{x=0} = a_1 = B\,. \tag{24}$$

Dengan diketahuinya a_0 dan a_1, semua a_n dapat dicari dengan relasi rekursi pada persamaan (22).

C. Polinomial Legendre

Contoh $y(x)$ pada persamaan (22) untuk beberapa nilai l:

$$l = 0 \rightarrow a_2 = 0 \rightarrow y(x) = a_0 + \sum_{n=odd}^{\infty} a_n x^n \tag{25}$$
$$l = 1 \rightarrow a_3 = 0 \rightarrow y(x) = a_1 x + \sum_{n=even}^{\infty} a_n x^n \tag{26}$$
$$l = 2 \rightarrow a_4 = 0 \rightarrow y(x) = a_0 + a_2 x^2 + \sum_{n=odd}^{\infty} a_n x^n = a_0(1-3x^2) + \sum_{n=odd}^{\infty} a_n x^n \tag{27}$$
$$l = 3 \rightarrow a_5 = 0 \rightarrow y(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \sum_{n=even}^{\infty} a_n x^n = a_1 x\left(1-\frac{5}{3}x^2\right) + \sum_{n=even}^{\infty} a_n x^n ... \tag{28}$$

Kita lihat pada persamaan (25) – (28) bahwa $y(x)$ berupa suatu polinomial orde l ditambah sebuah deret $\sum_{n=odd}^{\infty}$ atau $\sum_{n=even}^{\infty}$. Untuk $x = \pm 1$, deret $\sum_{n=odd}^{\infty}$ dan $\sum_{n=even}^{\infty}$ tersebut divergen (lihat Boas), sehingga $y(\pm 1)$ juga divergen. Namun, pada $y(x)$ masih ada konstanta a_0 dan a_1, yang nilainya dapat ditentukan berdasarkan syarat batas. Atau, nilai a_0 dan a_1 dapat juga ditentukan sedemikian, sehingga $y(\pm 1)$ tidak divergen.

Polinomial Legendre orde l, yaitu $P_l(x)$, didefinisikan sebagai solusi (dari sekian banyak solusi yang mungkin) persamaan Legendre, dengan syarat batas $y(\pm 1) = \pm 1$:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_l(x) - 2x\frac{d}{dx}P_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0\,,\ (l = 0, 1, 2, ...)\,. \tag{29}$$

Persamaan (29) merupakan persamaan eigenvalue. Kita dapat tuliskan sebagai:

$$\left[(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}\right]P_l(x) = l(l+1)P_l(x) \rightarrow f(D)P_l(x) = l(l+1)P_l(x)\,, \tag{30}$$

dengan $f(D)$ sebagai operator:

$$f(D) = (x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} \tag{31}$$

serta $P_l(x)$ sebagai eigenfunction dan l sebagai eigenvalue untuk operator $f(D)$. Beberapa contoh $P_l(x)$:

$$l = 0\,,\ a_1 = 0\,,\ a_0 = 1 \rightarrow P_0(x) = y(x) = 1 \tag{32}$$

$$l = 1\,,\ a_0 = 0\,,\ a_1 = 1 \rightarrow P_1(x) = y(x) = x \tag{33}$$

$$l = 2\,,\ a_1 = 0\,,\ a_0 = -\frac{1}{2} \rightarrow P_2(x) = y(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \tag{34}$$

$$l = 3\,,\ a_0 = 0\,,\ a_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow P_1(x) = y(x) = \frac{3}{2}x\left(\frac{5}{3}x^2 - 1\right)\,. \tag{35}$$

Catatan: $P_l(x)$ disebut polinomial Legendre jenis pertama. Ada polinomial Legendre jenis kedua, yaitu $Q_l(x)$, yang jarang digunakan dan tidak dibahas di sini.