Catatan Fisika Matematika 3

Materi 2

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.547 – p.561

A. Fungsi error

Dalam permasalahan peluang / probabilitas, statistik dapat dijumpai fungsi error (*error function*).

- Fungsi error $\mathrm{erf}(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt\, e^{-t^2} . \tag{1}$$

Namun, mungkin saja dalam literatur lain digunakan fungsi error, yang definisinya tidak persis sama dengan yang ditunjukkan oleh persamaan (1), sehingga sebaiknya kita cek. Melihat persamaan (1), fungsi error menyatakan atau sebanding dengan luas daerah di bawah kurva Gaussian e^{-t^2}.

Mari kita kerjakan integral berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^x dt\, e^{-t^2/a} &= \sqrt{a} \int_0^{x/\sqrt{a}} du\, e^{-u^2} , \quad (t = \sqrt{a}u) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a\pi}\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) . \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan demikian, kita peroleh definisi fungsi error yang lebih umum:

$$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^x dt\, e^{-t^2/a} . \tag{3}$$

Untuk $x < 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}\left(\frac{-|x|}{\sqrt{a}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^{-|x|} dt\, e^{-t^2/a} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^{|x|} du\, e^{-u^2/a} , \quad (t = -u) \\ &= -\,\mathrm{erf}\left(\frac{|x|}{\sqrt{a}}\right) . \end{aligned} \tag{4}$$

Dengan demikian, fungsi error merupakan fungsi antisimetrik di sekitar $x = 0$, atau biasa disebut fungsi ganjil. Persamaan (4) dapat dipakai untuk menghitung fungsi error dengan argumen negatif ($x < 0$).

Untuk nilai ekstrim $x = \infty$ diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{erf}(\infty) &= \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{-t^2/a} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du\, u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,, \quad (t = \sqrt{au}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Untuk nilai $|x| \ll 1$, ini berarti juga $|t| \ll 1$, sehingga kita dapat ekspansi $e^{-t^2/a}$ dalam deret Taylor dan diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^x dt \left(1 - \frac{t^2}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{a}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{t^2}{a}\right)^3 + ...\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3a} + \frac{x^5}{2! \cdot 5a^2} - \frac{x^7}{3! \cdot 7a^3} + ...\right) \\
&= \frac{2x}{\sqrt{a\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{3a} + \frac{x^4}{2! \cdot 5a^2} - \frac{x^6}{3! \cdot 7a^3} + ...\right)\,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Dengan demikian, kita dapatkan juga bahwa $\mathrm{erf}(0) = 0$.

- Fungsi error komplementer $\mathrm{erfc}(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$
\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt\ e^{-t^2}\,. \tag{7}
$$

Dengan cara yang sama seperti pada persamaan (2), kita dapatkan definisi yang lebih umum untuk fungsi error komplementer:

$$
\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_x^\infty dt\ e^{-t^2/a}\,. \tag{8}
$$

Relasi antara fungsi error komplementer dan fungsi error diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^x dt\ e^{-t^2/a} + \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_x^\infty dt\ e^{-t^2/a} \\
&= \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty dt\ e^{-t^2/a} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy\ y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}\,, \quad (t = \sqrt{ay}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Dengan demikian, kita dapatkan fungsi error komplementer untuk nilai x khusus:

$$
\mathrm{erfc}(\infty) = 1 - \mathrm{erf}(\infty) = 0 \tag{10}
$$

$$
\mathrm{erfc}(0) = 1 - \mathrm{erf}(0) = 1\,. \tag{11}
$$

Dengan menggunakan persamaan (9) dan (6), fungsi error komplementer dapat dinyatakan dalam bentuk deret sebagai:

$$\begin{aligned}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) &= 1 - \frac{2x}{\sqrt{a\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{3a} + \frac{x^4}{2!\cdot 5a^2} - \frac{x^6}{3!\cdot 7a^3} + ...\right) \\ &= 1 - \frac{2x}{\sqrt{a\pi}} + \frac{2x^3}{a\sqrt{a\pi}}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{2!\cdot 5a} + \frac{x^4}{3!\cdot 7a^2} - ...\right) . \end{aligned} \tag{12}$$

- Fungsi error imajiner didefinisikan sebagai berikut:

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dt\, e^{t^2} \tag{13}$$

atau secara lebih umum

$$\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{a\pi}}\int_0^x dt\, e^{t^2/a} . \tag{14}$$

Dari definisi itu kita peroleh relasi antara fungsi error imajiner dan fungsi error sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{a\pi}}\int_0^x dt\, e^{t^2/a} \\ &= -\, i\frac{2}{\sqrt{a\pi}}\int_0^{ix} du\, e^{-u^2/a} , \quad (t = -iu) \\ &= -\, i \operatorname{erf}\left(\frac{ix}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

atau

$$i \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{ix}{\sqrt{a}}\right) . \tag{16}$$

- Untuk distribusi normal (distribusi Gaussian) standar, dikenal fungsi distribusi kumulatif $\Phi(x)$, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} . \tag{17}$$

Kita evaluasi $\Phi(x)$ dan diperoleh:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\, u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} , \quad (t = -\sqrt{2u}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) . \end{aligned} \tag{18}$$

Kebalikan dari persamaan (18) adalah:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2\Phi(x) - 1 \tag{19}$$

atau

$$\mathrm{erf}(x) = 2\Phi\left(\sqrt{2}x\right) - 1\,. \tag{20}$$

B. Deret asimptotik

- Sebuah deret dinyatakan sebagai penjumlahan suku-sukunya, seperti ilustrasi berikut:

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) + \ldots\,. \tag{21}$$

Deret tak berhingga (*infinite series*) adalah deret yang terdiri dari suku yang banyak sekali tak berhingga (lihat Boas Bab 1 tentang deret tak berhingga):

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)\,, \quad \text{(deret tak berhingga)}\,. \tag{22}$$

Apabila jumlah (atau nilai) sebuah deret pada limit $x \to x_0$ berhingga, maka deret itu disebut konvergen pada $x \to x_0$; apabila jumlah sebuah deret pada limit $x \to x_0$ tak berhingga, maka deret itu disebut divergen pada $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_j \phi_j(x) < \infty\,, \quad \text{(deret konvergen pada } x \to x_0) \tag{23}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_j \phi_j(x) \not< \infty\,, \quad \text{(deret divergen pada } x \to x_0)\,. \tag{24}$$

Persamaan (23) dan (24) berlaku juga untuk deret tak berhingga. Sebuah deret dapat saja divergen pada limit x tertentu, namun konvergen pada nilai x yang lain.

- Ambillah sebuah deret tak berhingga:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)\,. \tag{25}$$

Anggaplah sebuah fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan / diekspansi dalam deret pada persamaan (25) sampai suku ke-N sebagai berikut:

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)\right) + \mathcal{O}_N(x)\,, \tag{26}$$

dengan $\mathcal{O}_N(x)$ merupakan suku error untuk ekspansi sampai suku ke-N. Kita bandingkan besar (magnitudo) suku error $\mathcal{O}_N(x)$ terhadap besar suku ekspansi terakhir, yaitu $\phi_N(x)$, pada suatu limit $x \to x_0$. Apabila pada limit $x \to x_0$ didapatkan:

$$\frac{|\mathcal{O}_N(x)|}{|\phi_N(x)|} = \frac{\left|f(x) - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)\right|}{|\phi_N(x)|} \to 0\,, \tag{27}$$

maka deret pada persamaan (25) merupakan ekspansi asimptotik atau deret asimptotik fungsi $f(x)$ pada $x \to x_0$ dan ditulis sebagai:

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)\,. \tag{28}$$

Dalam hal ini, deret pada persamaan (25) itu sendiri pada limit $x \to x_0$ dapat saja bersifat divergen atau konvergen.

- Deret asimptotik dapat dipakai untuk mencari nilai pendekatan suatu fungsi $f(x)$ pada limit x tertentu. Jika diperoleh deret asimptotik fungsi $f(x)$ pada limit itu, maka $f(x)$ pada limit itu dapat diperoleh sebagai suatu pendekatan dengan mengambil beberapa suku dari deret asimptotik itu. Contoh, kita ingin mencari nilai fungsi $f(x)$ berikut untuk x bernilai besar:

$$f(x) = \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t}\,. \tag{29}$$

Kita kerjakan integral pada $f(t)$ di atas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^3} \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\frac{e^{-x}}{x^3} - 6\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^4} \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\frac{e^{-x}}{x^3} - 6\frac{e^{-x}}{x^4} + 24\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^5}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Kita lihat ada deret tak berhingga, yang mungkin menjadi deret asimptotik $f(x)$ untuk x besar:

$$\frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} + ...\right)\,. \tag{31}$$

Kita ambil ekspansi $f(x)$ dalam deret tersebut sampai suku ke-2 sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 2\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^3}\,. \tag{32}$$

Untuk x besar kita bandingkan magnitudo suku error (suku integral di persamaan (32)):

$$\left|2\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^3}\right| = 2\left|\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^3}\right| \tag{33}$$

dengan magnitudo suku ke-2 deret di persamaan (32):

$$\left|\frac{e^{-x}}{x^2}\right| = \frac{e^{-x}}{x^2}\,. \tag{34}$$

Pada integral di persamaan (33), x adalah batas bawah atau nilai terkecil dari variabel integral t. Dengan demikian:

$$\begin{aligned} 2\left|\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^3}\right| &< 2\left|\int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{x^3}\right| \\ &< \frac{2}{x^3}\left|\int_x^\infty dt\, e^{-t}\right| \\ &< 2\frac{e^{-x}}{x^3} \end{aligned} \tag{35}$$

Kita lihat untuk x besar:

$$2\frac{e^{-x}}{x^3} < \frac{e^{-x}}{x^2}\,, \tag{36}$$

yang berarti pada persamaan (32) besar suku error kurang dari besar suku terakhir deret:

$$2\left|\int_x^\infty dt\ \frac{e^{-t}}{t^3}\right| < \frac{e^{-x}}{x^2}. \tag{37}$$

Dengan demikian, deret pada persamaan (31) merupakan deret asimptotik fungsi $f(x)$ pada persamaan (29) untuk x bernilai besar:

$$f(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} + ...\right) \tag{38}$$

dan $f(x)$ untuk x bernilai besar dapat dihitung nilainya sebagai suatu pendekatan dengan mengambil beberapa, misalkan 2, suku pertama saja dari ekspansi di persamaan (38).

C. Rumus Stirling

Untuk n dan p bernilai sangat besar, fungsi faktorial $n!$ dan fungsi Gamma $\Gamma(p+1)$ dapat dihitung sebagai suatu pendekatan yang baik dengan rumus Stirling:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \tag{39}$$

$$\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}\,. \tag{40}$$

Contoh:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\sqrt{n}\,\Gamma(n+1)} &\sim \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)}{\sqrt{n}\,n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \\
&\sim \frac{(n+\frac{1}{2})^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi(n+\frac{1}{2})}}{\sqrt{n}\,n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \\
&\sim \frac{(n+\frac{1}{2})^{(n+\frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{n^{(n+1)}} \\
&\sim \frac{(n+\frac{1}{2})^{(n+1)}}{n^{(n+1)}}e^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim \frac{n^{(n+1)}(1+\frac{1}{2n})^{(n+1)}}{n^{(n+1)}}e^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(n+1)} e^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim \left(1+\frac{(n+1)}{2n}\right) e^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim \left(1+\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned} \tag{41}$$

Pada langkah ke-3 terakhir digunakan ekspansi binomial $(1+a)^n \sim 1 + na$ untuk $a \ll 1$.

D. Integral eliptik

Mungkin saja ditemui beberapa hasil perhitungan atau pekerjaan teoretik dinyatakan dalam integral eliptik. Nama eliptik berkaitan dengan salah satu aplikasi dalam menghitung panjang busur elips (lihat Boas, contoh 4).

- Integral eliptik jenis pertama $F(\phi, k)$ dan jenis kedua $E(\phi, k)$ dalam bentuk Legendre didefinisikan sebagai berikut:

$$F(\phi,k) = \int_0^{\phi} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,, \quad (0 \leqslant k \leqslant 1) \tag{42}$$

$$E(\phi,k) = \int_0^{\phi} d\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,, \quad (0 \leqslant k \leqslant 1) \tag{43}$$

  ϕ disebut sebagai amplitudo integral eliptik dan k modulus integral eliptik.

  Sedikit variasi, jika $0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1$, kita dapakan:

$$\begin{aligned} F\left(\phi, \frac{a}{b}\right) &= \int_0^{\phi} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta}}\,, \quad \left(0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1\right) \\ &= b\int_0^{\phi} d\theta \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} E\left(\phi, \frac{a}{b}\right) &= \int_0^{\phi} d\theta \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta}\,, \quad \left(0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1\right) \\ &= \frac{1}{b}\int_0^{\phi} d\theta \sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

  Contoh:

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} d\beta \frac{1}{\sqrt{8+\cos^2(3\beta)}} &= \frac{1}{3}\int_0^{3\alpha} d\theta \frac{1}{\sqrt{8+\cos^2\theta}}\,, \ (\beta = \theta/3) \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{3\alpha} d\theta \frac{1}{\sqrt{9-\sin^2\theta}} \\ &= \frac{1}{9}F\left(3\alpha, \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} d\beta \sqrt{9-16\sin^2\beta\cos^2\beta} &= \int_0^{\alpha} d\beta \sqrt{9-4\sin^2(2\beta)} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\alpha} d\theta \sqrt{9-4\sin^2\theta}\,, \ (\beta = \theta/2) \\ &= \frac{3}{2}E\left(2\alpha, \frac{2}{3}\right)\,. \end{aligned} \tag{47}$$

- Dengan mengganti variabel menurut $t = \sin\theta$ dan $x = \sin\phi$ pada persamaan (42) dan (43), diperoleh integral eliptik dalam bentuk Jacobi (lihat Boas p.555):

$$F(\phi,k) = F(\arcsin x, k) = \int_0^{x} dt\, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}\,, \quad (0 \leqslant k \leqslant 1) \tag{48}$$

$$E(\phi,k)=E(\arcsin x,k)=\int_0^x dt\ \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,,\quad (0\leqslant k\leqslant 1) \tag{49}$$

Sedikit variasi, jika $0\leqslant \frac{a}{b}\leqslant 1$, kita dapakan:

$$\begin{aligned} F\left(\arcsin x,\frac{a}{b}\right) &= \int_0^x dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}t^2}}\,,\quad \left(0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 1\right)\\ &= b\int_0^x dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{b^2-a^2t^2}} \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} E\left(\arcsin x,\frac{a}{b}\right) &= \int_0^x dt\ \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,,\quad \left(0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 1\right)\\ &= \frac{1}{b}\int_0^x dt\ \frac{\sqrt{b^2-a^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \int_0^y du\ \frac{1}{\sqrt{1-4u^2}\sqrt{1-u^2}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2y} dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}}\,,\ (u=t/2)\\ &= \frac{1}{2}F\left(\arcsin(2y),\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \int_0^y du\ \frac{\sqrt{9-u^2}}{\sqrt{4-u^2}} &= 2\int_0^{y/2} dt\ \frac{\sqrt{9-4t^2}}{\sqrt{4-4t^2}}\,,\ (u=2t)\\ &= \int_0^{y/2} dt\ \frac{\sqrt{9-4t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= 3E\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right),\frac{2}{3}\right)\,. \end{aligned} \tag{53}$$

- Untuk $\phi=\frac{\pi}{2}$, diperoleh integral eliptik komplit K (atau $K(k)$) dan E (atau $E(k)$):

$$K=K(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^1 dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \tag{54}$$

$$E=E(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}=\int_0^1 dt\ \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,. \tag{55}$$

- Untuk integral berlaku penjumlahan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\int_0^a dx\ f(x)+\int_a^b dx\ f(x)=\int_0^b dx\ f(x)\\ &\qquad\to\int_a^b dx\ f(x)=\int_0^b dx\ f(x)-\int_0^a dx\ f(x)\,, \end{aligned} \tag{56}$$

dengan a dan b bernilai baik negatif maupun positif. Untuk integran yang merupakan fungsi genap, contoh $f(x^2)$, berlaku relasi integral berikut, dengan $p>0$:

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p dx\ f(x^2) &= \int_{-p}^0 dx\ f(x^2)+\int_0^p dx\ f(x^2)\\ &= -\int_0^{-p} dx\ f(x^2)+\int_0^p dx\ f(x^2) \end{aligned}$$

$$= 2\int_0^p dx\ f(x^2)$$

$$\rightarrow \int_0^{-p} dx\ f(x^2) = -\int_{-p}^{0} dx\ f(x^2) = -\int_0^p dx\ f(x^2)\,. \tag{57}$$

Integran pada integral eliptik merupakan fungsi genap, yaitu bergantung pada $\sin^2\theta$, sehingga, dengan $\phi_1 > 0$, $\phi_2 > 0$, $0 \leqslant k \leqslant 1$ berlaku relasi berikut:

$$\begin{aligned}
\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} &= \int_0^{\phi_2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\phi_1} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\
&= F(\phi_2, k) - F(\phi_1, k) && (58) \\
\int_{-\phi_1}^{\phi_2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} &= \int_0^{\phi_2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{-\phi_1} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\
&= \int_0^{\phi_2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} + \int_0^{\phi_1} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\
&= F(\phi_2, k) + F(\phi_1, k)\,. && (59)
\end{aligned}$$

Relasi yang serupa berlaku juga untuk integral eliptik jenis kedua.

- Integran pada integral eliptik bergantung pada $\sin^2\theta$, sehingga selain merupakan fungsi genap juga bersifat periodik, dengan periode π. Dengan n bilangan bulat, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi\pm\phi} d\theta\ f(\sin^2\theta) &= \int_0^{\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + \int_{\pi}^{2\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + ... \\
&\quad ... + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + \int_{n\pi}^{n\pi\pm\phi} d\theta\ f(\sin^2\theta) \\
&= \int_0^{\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + \int_0^{\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + ... \\
&\quad ... + \int_0^{\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + \int_0^{\pm\phi} d\theta\ f(\sin^2\theta) \\
&= n\int_0^{\pi} d\theta\ f(\sin^2\theta) + \int_0^{\pm\phi} d\theta\ f(\sin^2\theta) \\
&= n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ f(\sin^2\theta) \pm \int_0^{\phi} d\theta\ f(\sin^2\theta) \\
&= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ f(\sin^2\theta) \pm \int_0^{\phi} d\theta\ f(\sin^2\theta) \\
&= 2nK(k) \pm F(\phi, k)\,. && (60)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$F(n\pi \pm \phi, k) = 2nK(k) \pm F(\phi, k) \tag{61}$$

$$E(n\pi \pm \phi, k) = 2nE(k) \pm E(\phi, k)\,. \tag{62}$$

- Contoh:

- Untuk $a > 1$, integral berikut dapat dinyatakan sebagai integral eliptik:

$$\int_0^{\phi} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2\theta}} \tag{63}$$

$$t = a\sin\theta\,,\ dt = a\cos\theta d\theta = a\sqrt{1-\sin^2\theta}d\theta = a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}t^2}d\theta \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^{\phi} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}} &= \frac{1}{a}\int_0^{a\sin\phi} dt \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{1}{a^2}t^2}} \\ &= \frac{1}{a} F\left(\arcsin(a\sin\phi), \frac{1}{a}\right)\,. \end{aligned} \tag{65}$$

- (Lihat Boas, contoh 4) Menghitung panjang busur elips dari sudut ϕ_1 sampai ϕ_2. Catatan, sudut harus dihitung dari sumbu mayor elips. Panjang elemen busur elips ds adalah:

$$ds = \sqrt{a_+^2\cos^2\theta + a_-^2\sin^2\theta}d\theta\,,\ (a_+ = \text{ sumbu mayor},\ a_- = \text{ sumbu minor}) \tag{66}$$

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi_2} ds &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\theta\sqrt{a_+^2\cos^2\theta + a_-^2\sin^2\theta} \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\theta\sqrt{a_+^2 - a_+^2\sin^2\theta + a_-^2\sin^2\theta} \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\theta\sqrt{a_+^2 - (a_+^2 - a_-^2)\sin^2\theta} \\ &= a_+\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\theta\sqrt{1 - \left(\frac{a_+^2 - a_-^2}{a_+^2}\right)\sin^2\theta} \\ &= a_+\left[E\left(\phi_2, \sqrt{\frac{a_+^2 - a_-^2}{a_+^2}}\right) - E\left(\phi_1, \sqrt{\frac{a_+^2 - a_-^2}{a_+^2}}\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{67}$$

Panjang busur setengah elips (setengah keliling elips):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ds &= a_+\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\sqrt{1 - \left(\frac{a_+^2 - a_-^2}{a_+^2}\right)\sin^2\theta} \\ &= 2a_+\int_0^{\pi/2} d\theta\sqrt{1 - \left(\frac{a_+^2 - a_-^2}{a_+^2}\right)\sin^2\theta} \\ &= 2a_+E\left(\sqrt{\frac{a_+^2 - a_-^2}{a_+^2}}\right)\,. \end{aligned} \tag{68}$$

- (Lihat Boas, contoh 5) Lihat kembali ayunan bandul. Pada catatan sebelumnya kita telah dapatkan persamaan untuk kecepatan ayunan bandul sebagai berikut:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + konst. \tag{69}$$

Jika simpangan awal bandul $\theta = \alpha$ dan pada saat awal kecepatan ayunan bandul nol, berarti:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{2g}{l}\cos\alpha = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)\,. \tag{70}$$

$$\to \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}\,. \tag{71}$$

Pada persamaan (71) dipilih akar yang negatif, karena t bertambah sementara θ berkurang, sehingga relasi dt dan $d\theta$ berkebalikan.

Periode ayunan bandul T sama dengan 4 kali waktu ayunan bandul dari $\theta = \alpha$ sampai $\theta = 0$. Dengan demikian, periode ayunan bandul diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned} T = 4\int_\alpha^0 dt &= -4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\alpha^0 d\theta\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{8l}{g}}\int_0^\alpha d\theta\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{8l}{g}}\int_0^\alpha d\theta\frac{1}{\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha d\theta\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}} \end{aligned} \tag{72}$$

$$t = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,,\ dt = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\theta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\theta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}t^2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\theta \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \to T = 4\int_\alpha^0 dt &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 dt\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}t^2}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\,. \end{aligned} \tag{74}$$

E. Fungsi eliptik

Pada integral eliptik di persamaan (42), (43), (48), (49), diketahui $x = \sin\phi$ atau $\phi = \arcsin x = \sin^{-1} x$. Dari persamaan (42) dan (48), dengan $k = 0$, kita peroleh:

$$\int_0^\phi d\theta = \phi \tag{75}$$

$$\int_0^\phi d\theta = \int_0^x dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{76}$$

$$\phi = \arcsin x = \sin^{-1} x \tag{77}$$

$$\to \phi = \int_0^x dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = \sin^{-1} x\,. \tag{78}$$

Secara umum, didefinisikan:

$$u = \int_0^x dt\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \mathrm{sn}^{-1}x\,, \quad (0 \leqslant k \leqslant 1) \tag{79}$$

$$\to x = \mathrm{sn}\, u\,,\ \text{(dibaca "ess-en" } u\text{)} \tag{80}$$

$$= \text{merupakan fungsi eliptik} \tag{81}$$

Kita peroleh x sebagai fungsi u dan sebagai fungsi ϕ:

$$x = \operatorname{sn} u = \sin\phi\,. \tag{82}$$

Didefinisikan juga:

$$\operatorname{cn} u = \cos\phi\,, \tag{83}$$

sehingga diperoleh relasi fungsi eliptik cn dan sn seperti fungsi cosinus dan sinus dalam trigonometri:

$$\operatorname{cn} u = \cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u} \to \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1\,. \tag{84}$$

Dari definisi di persamaan (79), kita dapat tuliskan:

$$\begin{aligned}
&\int_0^u dv = u = \int_0^x dt\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \int_0^\phi d\theta\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\\
&\to dv = d\theta\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\\
&\to du = d\phi\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,,\ \text{(sekedar ganti simbol / nama variabel)} &(85)\\
&\to d\phi = du\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,. &(86)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (85) atau (86) didefinisikan:

$$\operatorname{dn} u = \frac{d\phi}{du} = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 u} = \sqrt{1-k^2x^2}\,. \tag{87}$$

Dengan definisi $\operatorname{cn} u$ di persamaan (83) dan $\operatorname{dn} u$ di persamaan (87), diperoleh:

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \frac{d}{du}\sin\phi = \frac{d}{d\phi}\sin\phi\frac{d\phi}{du} = \cos\phi\frac{d\phi}{du} = \operatorname{cn} u\operatorname{dn} u\,. \tag{88}$$