Catatan Fisika Matematika 3

Materi 1

Acuan utama Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* Ed. 3, p.537 – p.547

Hasil pekerjaan dalam fisika dan juga teknik tidak selalu berupa nilai, namun juga berupa ekspresi matematik, dalam bentuk suatu persamaan matematik atau suatu rumus. Sebagian ekspresi matematik dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang sudah dikenal, sehingga lebih ringkas. Sekedar contoh, ekspresi deret tak berhingga $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - ...$ dapat diganti dengan fungsi sinus $\sin x$. Kita pelajari di sini beberapa fungsi spesial. Beberapa dari fungsi ini memiliki sifat-sifat khusus, sehingga, antara lain, dapat digunakan untuk merepresentasikan sifat fisis suatu sistem. Beberapa sifat fungsi-fungsi spesial ini juga dapat memudahkan kita dalam menurunkan atau menyelesaikan suatu persamaan.

## A. Fungsi faktorial

- Fungsi faktorial $n!$, dengan $n =$ bilangan bulat (*integer*), didefinisikan sebagai berikut:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n\,. \tag{1}$$

Selain didefinisikan seperti dalam persamaan (1), fungsi faktorial $n!$ juga dapat didefinisikan sebagai suatu integral:

$$n! = \int_0^\infty dx\ x^n e^{-x}\,. \tag{2}$$

Persamaan (2) dapat dibuktikan seperti berikut ini (catat bahwa $x$ dan $\alpha$ tidak saling bergantung):

$$\int_0^\infty dx\ e^{-\alpha x} = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{\alpha}(0-1) = \frac{1}{\alpha} \tag{3}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty dx\ e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\ \frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha x} = \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\,, \quad (x \text{ dan } \alpha \text{ saling bebas})$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dx\ (-x)e^{-\alpha x} = (-1)\frac{1}{\alpha^2} \tag{4}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty dx\ (-x)e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\ (-x)\frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha x} = (-1)\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dx\ (-x)^2 e^{-\alpha x} = (-1)(-2)\frac{1}{\alpha^3} \tag{5}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty dx\ (-x)^2 e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\ (-x)^2\frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha x} = (-1)(-2)\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha^3}$$

$$\to \int_0^\infty dx\ (-x)^3 e^{-\alpha x} = (-1)(-2)(-3)\frac{1}{\alpha^4} \tag{6}$$

$$...$$

$$\to \frac{d^n}{d\alpha^n}\int_0^\infty dx\ e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\ (-x)^n e^{-\alpha x} = \frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{1}{\alpha^3} = (-1)(-2)(-3)...(-n)\frac{1}{\alpha^{(n+1)}}$$

$$\to \int_0^\infty dx\ (-1)^n x^n e^{-\alpha x} = (-1)^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)\frac{1}{\alpha^{(n+1)}} \tag{7}$$

$$\to \int_0^\infty dx\ x^n e^{-\alpha x} = (1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)\frac{1}{\alpha^{(n+1)}} = n!\frac{1}{\alpha^{(n+1)}} \tag{8}$$

$$\to \int_0^\infty dx\ x^n e^{-x} = n!\ , \qquad (\alpha = 1)\,. \tag{9}$$

- Definisi suatu fungsi dalam beberapa cara sangat bermanfaat. Jika nilai fungsi tersebut tidak dapat atau sulit dicari dengan menggunakan definisi yang satu, maka definisi yang lain dapat digunakan. Contoh, nilai 0! tdak dapat dicari dengan menggunakan definisi pada persamaan (1), namun dapat diperoleh dengan memakai persamaan (2):

$$0! = \int_0^\infty dx\ x^0 e^{-x} = \int_0^\infty dx\ e^{-x} = -e^{-x}\Big|_0^\infty = -(0-1) = 1\,. \tag{10}$$

- Dengan membandingkan dua fungsi faktorial $n!$ dan $(n+1)!$ berikut:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n \tag{11}$$

$$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot (n+1)\,, \tag{12}$$

kita dapatkan relasi rekursi fungsi faktorial, yaitu:

$$(n+1)! = n!(n+1) = (n+1)n!\,. \tag{13}$$

Dengan relasi rekursi ini kita dapat menyatakan suatu ekspresi matematika secara lebih baik. Sekedar contoh,

$$\begin{aligned}(n+m)! &= (n+m)(n+m-1)! \\ &= (n+m)(n+m-1)(n+m-2)! \\ &= (n+m)(n+m-1)(n+m-2)(n+m-3)! \\ &= ... \\ &= (n+m)(n+m-1)(n+m-2)...(n+1)n!\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Dengan demikian, $(n+m)(n+m-1)(n+m-2)...(n+1)$ dapat dinyatakan sebagai $(n+m)!/n!$.

## B. Fungsi Gamma

- Fungsi Gamma $\Gamma(p)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty dx\ x^{(p-1)} e^{-x}\,, \quad (p > 0)\,. \tag{15}$$

Argumen fungsi Gamma pada persamaan (15), yaitu $p$, tidak terbatas hanya bernilai bulat, melainkan sembarang, asalkan positif (lebih dari 0). Secara sama, kita juga dapat definisikan fungsi Gamma sebagai:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty dx\; x^p e^{-x}\,, \quad (p > -1)\,. \tag{16}$$

Pada persamaan (16), $p$ bernilai sembarang, tidak hanya bulat, asalkan lebih dari -1, sehingga tetap saja argumen fungsi Gamma, dalam hal ini $p+1$, positif (lebih dari 0).

- Untuk $p = n =$ bilangan bulat diperoleh:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dx\; x^{(n-1)} e^{-x} = (n-1)! \tag{17}$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx\; x^n e^{-x} = n!\,. \tag{18}$$

- Kita bebas memilih definisi fungsi Gamma, apakah menurut persamaan (15) atau persamaan (16), asalkan kita ingat bahwa definisi itu berlaku hanya untuk argumen fungsi Gamma positif. Contoh, integral-integral berikut boleh dinyatakan sebagai fungsi Gamma:

$$\int_0^\infty dx\; x^{-0.9} e^{-x} = \Gamma(0.1) \tag{19}$$

$$\int_0^\infty dx\; x^{-0.4} e^{-x} = \Gamma(0.6) \tag{20}$$

$$\int_0^\infty dx\; x^{1} e^{-x} = \Gamma(2) \tag{21}$$

$$\int_0^\infty dx\; x^{1.3} e^{-x} = \Gamma(2.3)\,, \tag{22}$$

namun persamaan (23) – (26) berikut ini **SALAH**:

$$\int_0^\infty dx\; x^{-2.7} e^{-x} = \Gamma(-1.7) \tag{23}$$

$$\int_0^\infty dx\; x^{-2} e^{-x} = \Gamma(-1) \tag{24}$$

$$\int_0^\infty dx\; x^{-1.1} e^{-x} = \Gamma(-0.1) \tag{25}$$

$$\int_0^\infty dx\; x^{-1} e^{-x} = \Gamma(0)\,. \tag{26}$$

- Kita dapat cari relasi rekursi untuk fungsi Gamma sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^\infty dx\; x^p e^{-x} \\ &= -\,x^p e^{-x}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty dx\; x^{(p-1)} e^{-x} \\ &= -\,x^p e^{-x}\Big|_0^\infty + p\Gamma(p)\,, \end{aligned} \tag{27}$$

sehingga diperoleh

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \text{atau} \quad \Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1). \tag{28}$$

- Definisi fungsi Gamma pada persamaan (15) atau persamaan (16) berlaku untuk fungsi Gamma dengan argumen positif. Namun, relasi rekursi fungsi Gamma pada persamaan (28) dapat dipakai untuk mencari fungsi Gamma dengan argumen bernilai negatif. Contoh:

$$\begin{aligned}\Gamma(-2.4) &= \frac{1}{-2.4}\Gamma(-1.4) \\ &= \frac{1}{(-2.4)(-1.4)}\Gamma(-0.4) \\ &= \frac{1}{(-2.4)(-1.4)(-0.4)}\Gamma(0.6)\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Kita juga dapat mencari nilai $\Gamma(0)$:

$$\Gamma(0) = \frac{1}{0}\Gamma(1) = \frac{1}{0}1 = \infty\ , \quad (\Gamma(1) = 0! = 1)\,. \tag{30}$$

Nilai fungsi Gamma untuk argumen bernilai bulat negatif, dengan demikian, juga tak berhingga:

$$\Gamma(-n) = \frac{1}{-n}\Gamma(-n+1) = \frac{1}{(-n)(-n+1)}\Gamma(-n+2) = \frac{1}{(-n)(-n+1)...(-1)}\Gamma(0) = \infty\,. \tag{31}$$

- Jika variabel diubah, suatu ekspresi matematik dapat berubah. Berkenaan dengan itu, sebuah integral yang mula-mula tidak tampak seperti dalam definisi fungsi Gamma di persamaan (15) atau (16) dapat saja diubah dengan konversi variabel yang tepat menjadi integral seperti dalam definisi fungsi Gamma, meski tidak selalu dapat dilakukan. Beberapa contoh:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\, \left(\ln x^{-1}\right)^{(p-1)} &= -\int_\infty^0 du\ e^{-u}\left(\ln e^{u}\right)^{(p-1)}\ ,\ (x = e^{-u}\ ,\ dx = -e^{-u}du) \\ &= \int_0^\infty du\ e^{-u}u^{(p-1)} \\ &= \Gamma(p)\,, (\text{untuk } p > 0)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx\ x^{(2p-1)}e^{-x^2} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty du\ u^{-1/2}u^{(2p-1)/2}e^{-u}\ ,\ \left(x = \sqrt{u}\,,\ dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty du\ u^{(p-1)}e^{-u} \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(p)\,, (\text{untuk } p > 0)\,. \end{aligned} \tag{33}$$

- Perkalian fungsi Gamma untuk argumen positif (memanfaatkan persamaan (33)):

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left[2\int_0^\infty dy\ y^{(2p-1)}e^{-y^2}\right]\left[2\int_0^\infty dx\ x^{(2q-1)}e^{-x^2}\right]\ , \quad (p > 0\ \&\ q > 0) \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty dx\, dy\ x^{(2q-1)}y^{(2p-1)}e^{-(x^2+y^2)}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Integral pada persamaan (34) merupakan integral 2 dimensi pada bidang xy dalam daerah yang meliputi kuadran 1 sepenuhnya. Kita dapat gunakan koordinat polar $(r, \theta)$ untuk menghitungnya. Konversi integral dari koordinat cartesian ke koordinat polar mengikuti: $x = r\cos\theta$,

$y = r\sin\theta$, serta elemen luas $dx\,dx$ diganti dengan $rdr\,d\theta$. Untuk kuadran 1, nilai $r$ adalah $0 \leqslant r \leqslant \infty$ dan nilai $\theta$ adalah $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty dr\ r \int_0^{\pi/2} d\theta\ (r\cos\theta)^{(2q-1)}(r\sin\theta)^{(2p-1)}e^{-r^2} \\
&= 4\int_0^\infty dr\ r^{[2(p+q)-1]}e^{-r^2}\int_0^{\pi/2} d\theta\ (\cos\theta)^{(2q-1)}(\sin\theta)^{(2p-1)} \\
&= 2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2} d\theta\ (\cos\theta)^{(2q-1)}(\sin\theta)^{(2p-1)}\,. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Untuk sembarang nilai $p$ dan $q$ kita lanjutkan persamaan (35) setelah mengenal fungsi Beta. Untuk $p = q = \frac{1}{2}$, kita lanjutkan di sini:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Gamma(1)\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi\,. \qquad (36)$$

Dengan demikian, kita peroleh

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,. \qquad (37)$$

Untuk $q = 1 - p$ diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(1-p) &= 2\Gamma(1)\int_0^{\pi/2} d\theta\ (\cos\theta)^{(1-2p)}(\sin\theta)^{(2p-1)} \\
&= 2\int_0^{\pi/2} d\theta\ (\tan\theta)^{(2p-1)} \\
&= 2\int_0^\infty dy\frac{y^{(2p-1)}}{1+y^2}\,, \quad (y = \tan\theta) \\
&= \int_0^\infty dx\frac{x^{(p-1)}}{1+x}\,, \quad (x = y^2) \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi p}\,. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

(Hasil terakhir pada persamaan (38) dapat dicari dengan menggunakan teorema residu, lihat Boas p.692 – p.694.) Persamaan (37) juga dapat diperoleh dari persamaan (38), dengan memasukkan $p = \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi} = \pi \\
\to \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\,. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

- Contoh: (Dari soal 16 p.540) Sebuah benda bermassa $m$ berada dalam pengaruh potensial $V(x) = \frac{1}{2}m\ln x$. Pada $t = 0$ benda berada di posisi $x = 1$ dalam keadaan diam. Hitung waktu yang diperlukan benda untuk berpindah dari posisi mula-mula sampai ke pusat.
  Gaya yang bekerja pada benda:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d}{dx}V(x) = -\frac{m}{2x}\,. \qquad (40)$$

Sehingga:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}\,. \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2x}\frac{dx}{dt}\,, \quad \left(\text{kedua sisi dikalikan dengan } \frac{dx}{dt}\right)\\
\rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln x\,, \quad \left(v = \frac{dx}{dt}\,, vdv = \frac{1}{2}dv^2\,, \frac{1}{x}dx = d\ln x\right)\\
\rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= -\ln x + konst. = \ln x^{-1} + konst.\,, \quad (v = 0 \text{ di } x = 1 \rightarrow konst. = 0)\\
\rightarrow \frac{dx}{dt} &= \pm\left(\ln x^{-1}\right)^{1/2}\\
\rightarrow \frac{dx}{dt} &= -\left(\ln x^{-1}\right)^{1/2}\,, \quad \text{(kecepatan ke arah kiri, negatif)}\\
\rightarrow \int_0^\tau dt &= -\int_1^0 dx\left(\ln x^{-1}\right)^{-1/2} = \int_0^1 dx\left(\ln x^{-1}\right)^{-1/2}\\
\rightarrow \tau &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,, \quad \text{(lihat persamaan (32))}\,.
\end{aligned} \tag{42}$$

## C. Fungsi Beta

- Fungsi Beta $B(p,q)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$B(p,q) = \int_0^1 dx\; x^{(p-1)}(1-x)^{(q-1)}\,, \quad (p > 0 \;\&\; q > 0)\,. \tag{43}$$

- Jika kita nyatakan $1 - x = y$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= -\int_1^0 dy\;(1-y)^{(p-1)}y^{(q-1)}\\
&= \int_0^1 dy\; y^{(q-1)}(1-y)^{(p-1)}\\
&= B(q,p)\,.
\end{aligned} \tag{44}$$

- Dengan konversi variabel kita dapatkan definisi fungsi Beta dengan ekspresi yang berbeda dari yang diberikan di persamaan (43). Contoh (lihat sebagian penurunan di Boas):

$$B(p,q) = \frac{1}{a^{(p+q-1)}}\int_0^a dy\; y^{(p-1)}(a-y)^{(q-1)}\,, \quad (y = ax) \tag{45}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta\;(\sin\theta)^{(2p-1)}(\cos\theta)^{(2q-1)}\,, \quad (\sin\theta = \sqrt{x}) \tag{46}$$

$$= \int_0^\infty dy\;\frac{y^{(p-1)}}{(1+y)^{(p+q)}}\,, \quad \left(y = \frac{x}{1-x}\right)\,. \tag{47}$$

- Kita lanjutkan persamaan (35) dengan menggunakan persamaan (46) dan (44):

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2} d\theta\;(\cos\theta)^{(2p-1)}(\sin\theta)^{(2q-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(p+q)B(q,p) \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q)\,. \qquad (48)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, fungsi Beta dapat dinyatakan dalam fungsi Gamma sebagai:

$$
B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,. \qquad (49)
$$

Sebagai contoh, dari persamaan (37) kita dapatkan:

$$
B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi \qquad (50)
$$

dan dari persamaan (38):

$$
B(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}\,. \qquad (51)
$$

- Contoh: (Dari pendulum sederhana p.545 – p.546) Bayangkan sebuah pendulum dengan panjang tali $l$ dan massa beban $m$, yang berada di tempat dengan percepatan graviasi $g$. Persamaan gerak pendulum diperoleh sebagai:

$$
\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad (52)
$$

Untuk kasus simpangan kecil, $\sin\theta \simeq \theta$, persamaan gerak menjadi persamaan gerak osilasi harmonik sederhana:

$$
\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta\,, \qquad (53)
$$

dengan $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, $\nu$ adalah frekuensi, dan $T$ periode osilasi:

$$
T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (54)
$$

Untuk kasus simpangan besar, dengan syarat batas simpangan awal 90°dan kecepatan awal 0:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g}{l}\sin\theta \\
\rightarrow \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g}{l}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \\
\rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{g}{l}\frac{d\cos\theta}{dt} \\
\rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{2g}{l}\cos\theta + konst.\,, \quad \left(\frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ di } \theta = 90^\circ \rightarrow konst. = 0\right) \\
\rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta} \\
\rightarrow \int_0^{T/4} dt &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\pi/2} d\theta\ (\cos\theta)^{-1/2} \\
\rightarrow T &= \sqrt{\frac{2l}{g}}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\,. \qquad (55)
\end{aligned}
$$