Density Matrix Sistem 2 Partikel Spin $\frac{1}{2}$

(Contoh sistem 2 partikel spin $\frac{1}{2}$ yaitu sistem nukleon-nukleon (NN), hiperon-nukleon (YN).)

- Ambillah $\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle$ ($\lambda = \pm\frac{1}{2}$) sebagai keadaan spin $\frac{1}{2}$ dan merupakan *eigenstate* $\mathbf{S}^2$ dan S_z, dengan $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$, dan $\boldsymbol{\sigma}$ operator spin (matriks) Pauli:

$$\mathbf{S}^2\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle = \frac{3}{4}\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle \ , \ S_z\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle = \lambda\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle \ , \ \left(\lambda = \pm\frac{1}{2}\right) . \tag{1}$$

  Untuk selanjutnya penulisan $\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle$ kita singkat menjadi $|\lambda\rangle$:

$$\left|\frac{1}{2}\lambda\right\rangle \to |\lambda\rangle . \tag{2}$$

- *Eigenstate* sistem 2 partikel spin $\frac{1}{2}$ adalah $|\lambda_{1,i}\rangle|\lambda_{2,i}\rangle$ ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned}
|\lambda_{1,1}\rangle|\lambda_{2,1}\rangle &= \left|\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle \\
|\lambda_{1,2}\rangle|\lambda_{2,2}\rangle &= \left|\frac{1}{2}\right\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle \\
|\lambda_{1,3}\rangle|\lambda_{2,3}\rangle &= \left|-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle \\
|\lambda_{1,4}\rangle|\lambda_{2,4}\rangle &= \left|-\frac{1}{2}\right\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle .
\end{aligned} \tag{3}$$

- Sembarang keadaan spin $|n\rangle$ suatu sistem 2 partikel spin $\frac{1}{2}$, sesuai postulat ekspansi, dapat dinyatakan sebagai:

$$|n\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_i^{(n)}|\lambda_{1,i}\rangle|\lambda_{2,i}\rangle \ , \ (a_i^{(n)} = \text{ koefisien ekspansi}) . \tag{4}$$

- Bayangkan beberapa sistem yang identik, keadaan masing-masing sistem sama, yaitu $|n\rangle$. Kumpulan sistem identik tersebut membentuk satu sistem yang lebih besar dengan keadaan, tentu saja, $|n\rangle$. Ini gambaran mengenai suatu sistem murni, yang terdiri dari sistem-sistem yang identik. Meskipun terdiri dari beberapa sistem, namun sistem besar tersebut dapat dilihat sebagai satu sistem saja dengan keadaan $|n\rangle$. Keadaan $|n\rangle$ disebut keadaan murni (*pure state*).

- Hasil pengukuran suatu besaran spin $\langle O\rangle$ pada sistem dengan keadaan spin murni $|n\rangle$ adalah:

$$\langle O\rangle = \frac{\langle n|\hat{O}|n\rangle}{\langle n|n\rangle} \tag{5}$$

  Secara umum, $|n\rangle$ dapat ternormalisasi ($\langle n|n\rangle = 1$) maupun tidak ($\langle n|n\rangle \neq 1$).

- Suatu sistem dapat juga terdiri dari beberapa sistem yang tidak identik, yang walaupun partikel penyusun sistem-sistem itu identik, namun keadaan masing-masing sistem berbeda. Ini gambaran mengenai suatu sistem campuran. Keadaan sistem seperti ini merupakan keadaan campuran (*mixed state*).

- Anggaplah dalam keadaan campuran itu terdapat keadaan murni $|n\rangle$ dengan peluang P_n. Hasil pengukuran suatu besaran spin $\overline{\langle O\rangle}$ pada sistem dengan keadaan campuran tersebut adalah:

$$\overline{\langle O\rangle} = \frac{\sum_n P_n \langle n|\hat{O}|n\rangle}{\sum_n P_n \langle n|n\rangle} \,. \tag{6}$$

- Masukkan Eq. (4) ke Eq. (6):

$$\begin{aligned}
\overline{\langle O\rangle} &= \frac{\sum_n P_n \sum_i \langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|a_i^{(n)*}\hat{O}\sum_j a_j^{(n)}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle}{\sum_n P_n \sum_i \langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|a_i^{(n)*}\sum_j a_j^{(n)}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle} \\
&= \frac{\sum_{ij}\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}\hat{O}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle}{\sum_{ij}\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle} \\
&= \frac{\sum_{ij}\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|\hat{O}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle}{\sum_{ij}\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle} \\
&= \frac{\sum_{ij}\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}O_{ij}}{\sum_{ij}\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}\delta_{ij}} \\
&= \frac{\sum_{ij}\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_j^{(n)}O_{ij}}{\sum_i\sum_n a_i^{(n)*}P_n a_i^{(n)}} \\
&= \frac{\sum_{ij}\left(\sum_n a_j^{(n)}P_n a_i^{(n)*}\right)O_{ij}}{\sum_i\left(\sum_n a_i^{(n)}P_n a_i^{(n)*}\right)} \\
&= \frac{\sum_{ij}\rho_{ji}O_{ij}}{\sum_i \rho_{ii}} \\
&= \frac{\sum_j\sum_i \rho_{ji}O_{ij}}{\sum_i \rho_{ii}} \\
&= \frac{\sum_j (\rho O)_{jj}}{\sum_i \rho_{ii}} \\
\rightarrow \overline{\langle O\rangle} &= \frac{\mathrm{Tr}\ (\rho O)}{\mathrm{Tr}\ (\rho)} = \frac{\mathrm{Tr}\ (O\rho)}{\mathrm{Tr}\ (\rho)} \,,
\end{aligned} \tag{7}$$

dengan ρ disebut *density matrix*, yang elemennya sebagai berikut:

$$\rho_{ji} = \langle\lambda_{1,j}|\langle\lambda_{2,j}|\rho|\lambda_{1,i}\rangle|\lambda_{2,i}\rangle = \sum_n a_j^{(n)}P_n a_i^{(n)*} \,. \tag{8}$$

- *Density matrix*:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \hat{1}\ \rho\ \hat{1} \\
&= \sum_j |\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle\langle\lambda_{1,j}|\langle\lambda_{2,j}|\rho\sum_i |\lambda_{1,i}\rangle|\lambda_{2,i}\rangle\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}| \\
&= \sum_{ji} |\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle\langle\lambda_{1,j}|\langle\lambda_{2,j}|\rho|\lambda_{1,i}\rangle|\lambda_{2,i}\rangle\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}| \\
&= \sum_{ji} |\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle\rho_{ji}\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}| \\
&= \sum_{ji} |\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle \sum_n a_j^{(n)} P_n a_i^{(n)*}\langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}| \\
&= \sum_n \sum_j a_j^{(n)}|\lambda_{1,j}\rangle|\lambda_{2,j}\rangle P_n \sum_i \langle\lambda_{1,i}|\langle\lambda_{2,i}|a_i^{(n)*} \\
&= \sum_n |n\rangle P_n \langle n|\,. \qquad (9)
\end{aligned}
$$