

# T-Matrix dengan Spin Total $\frac{1}{2}$

Kini kita perhitungkan juga spin sistem, dan sebagai contoh, kita lihat hamburan dengan spin total  $s = \frac{1}{2}$ .

## 1 Spin $\frac{1}{2}$

Ambillah sebagai keadaan eigen spin  $\frac{1}{2}$  yaitu  $|\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle$ , dengan  $\hat{\mathbf{z}}$  menyatakan sumbu kuantisasi<sup>1</sup> dan  $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ . Keadaan  $|\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle$  memenuhi persamaan nilai eigen (dengan spin bernilai  $\frac{1}{2}$ ):

$$\mathbf{s}^2 |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle = \frac{3}{4} |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle \quad \text{dan} \quad s_z |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle = \lambda |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle. \quad (3)$$

Sebagai keadaan eigen operator besaran fisika,  $|\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle$  bersifat ortogonal dan komplit, dengan ortogonalitas dan relasi kekomplitan (*completeness relation*) sebagai berikut:

$$\langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \quad \text{dan} \quad \sum_{\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda| = 1. \quad (4)$$

## 2 Keadaan basis (*basis states*)

Untuk menghitung hamburan dengan spin total  $s = \frac{1}{2}$  kita gunakan keadaan basis  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ , yang diperoleh sebagai perkalian (perkalian tensor) keadaan bebas dengan momentum relatif  $\mathbf{p}$ , yaitu  $|\mathbf{p}\rangle$ , dan keadaan eigen spin total  $|\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle$ :

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle \equiv |\mathbf{p}\rangle \otimes |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle \equiv |\mathbf{p}\rangle |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle. \quad (5)$$

Ortogonalitas dan relasi kekomplitan  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$  diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'\lambda' | \mathbf{p}\lambda \rangle &= \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle \\ &= \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\lambda'\lambda} \end{aligned} \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>Ingin kembali kuliah Mekanika Kuantum tentang momentum angular. Sebagai momentum angular, spin  $\mathbf{s}$  dapat diuraikan dalam tiga komponennya, yaitu  $s_x$ ,  $s_y$ , dan  $s_z$ . Ketiga komponen ini komut dengan  $\mathbf{s}$ :

$$[\mathbf{s}^2, s_x] = [\mathbf{s}^2, s_y] = [\mathbf{s}^2, s_z] = 0, \quad (1)$$

namun antar ketiganya tidak komut:

$$[s_j, s_k] = i\epsilon_{jkl}s_l, \quad (\epsilon_{jkl} = \text{simbol Levi-Civita}). \quad (2)$$

Karena itu dipilih salah satu saja, yaitu  $s_z$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\lambda\rangle\langle\mathbf{p}\lambda| &= \sum_{\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle\langle\hat{\mathbf{z}}\lambda| \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Dalam basis  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$  elemen T-matrix dinyatakan sebagai berikut (serupa juga untuk elemen matriks potensial):

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \equiv \langle \mathbf{p}'\lambda' | T | \mathbf{p}\lambda \rangle. \quad (8)$$

### 3 Elemen matriks potential

Elemen matriks potensial dalam basis  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ , yaitu  $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ , diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \langle \mathbf{p}'\lambda' | V | \mathbf{p}\lambda \rangle \\ &= \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle \\ &= \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

dengan  $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  adalah potensial dalam ruang (representasi) momentum. Untuk kasus spin total  $s = \frac{1}{2}$  struktur umum  $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  adalah:

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) + f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) (\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}') (\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad (10)$$

dengan  $f_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}})$  suatu fungsi yang tidak bergantung pada spin. Elemen matriks potensial  $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  di Eq. (10) bersifat invarian rotasional (*rotational invariant*) dan memenuhi kekekalan paritas (*parity conservation*). Selain itu,  $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  bersifat invarian terhadap pembalikan waktu (*time-reversal invariant*), asalkan  $f_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}})$ , ( $i = 0, 1$ ) bergantung pada  $p'$  dan  $p$  secara simetrik:<sup>2</sup>

$$f_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) = g_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) + g_i(p, p', \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad (i = 0, 1). \quad (13)$$

---

<sup>2</sup>Pembalikan waktu membuat perubahan pada momentum dan spin sebagai berikut:  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{p}' \rightarrow -\mathbf{p}$ , dan  $\mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{s}$ . Jelas bahwa  $f_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}})$  di Eq. (13) bersifat *time-reversal invariant*. Adapun  $(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}')(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}})$  juga bersifat *time-reversal invariant* seperti ditunjukkan berikut ini, yaitu dengan menggunakan persamaan identitas:

$$(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}')(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} i \mathbf{s} \cdot (\hat{\mathbf{p}}' \times \hat{\mathbf{p}}), \quad (11)$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} ((-\mathbf{s}) \cdot (-\hat{\mathbf{p}}))((-\mathbf{s}) \cdot (-\hat{\mathbf{p}}')) &= \frac{1}{4} (-\hat{\mathbf{p}}) \cdot (-\hat{\mathbf{p}}') + \frac{1}{2} i (-\mathbf{s}) \cdot \{(-\hat{\mathbf{p}}) \times (-\hat{\mathbf{p}}')\} \\ &= \frac{1}{4} \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} i \mathbf{s} \cdot (\hat{\mathbf{p}}' \times \hat{\mathbf{p}}) \\ &= (\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}')(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (12)$$

Elemen matriks potensial  $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  di Eq. (9) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) \delta_{\lambda'\lambda} + f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) W_{\lambda'\lambda}(\hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}), \quad (14)$$

dengan komponen spin  $W_{\lambda'\lambda}(\hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}})$  diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\lambda'\lambda}(\hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}) &\equiv \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | (\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}') (\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}) | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[ \delta_{\lambda'\lambda} \left\{ \cos \theta' \cos \theta + e^{-2i\lambda(\phi'-\phi)} \sin \theta' \sin \theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\lambda',-\lambda} 2\lambda e^{2i\lambda\phi'} \left\{ \sin \theta' \cos \theta - e^{-2i\lambda(\phi'-\phi)} \cos \theta' \sin \theta \right\} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{4} f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) \left\{ \cos \theta' \cos \theta + e^{-2i\lambda(\phi'-\phi)} \sin \theta' \sin \theta \right\} \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) \frac{\lambda}{2} e^{2i\lambda\phi'} \left\{ \sin \theta' \cos \theta - e^{-2i\lambda(\phi'-\phi)} \cos \theta' \sin \theta \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Berikutnya, kita lihat elemen matriks potensial untuk kasus khusus  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ . Dari Eq. (16) diperoleh:

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} e^{2i\lambda\phi'} \sin \theta'. \end{aligned} \quad (17)$$

Dengan adanya delta Kronecker  $\delta_{\lambda',-\lambda}$  di suku kedua, dapat dinyatakan:

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} e^{i(\lambda+\lambda)\phi'} \sin \theta' \\ &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} e^{i(-\lambda'+\lambda)\phi'} \sin \theta' \\ &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'} \sin \theta'. \end{aligned} \quad (18)$$

Kemudian, delta Kronecker  $\delta_{\lambda'\lambda}$  di suku pertama membolehkan faktor  $e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'}$  juga ditambahkan di suku pertama, sehingga faktor  $e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'}$  dapat dipisahkan dari semua suku:

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) &= \delta_{\lambda'\lambda} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'} \sin \theta' \\ &= e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'} \left\{ \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\lambda',-\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} e^{-i(\lambda'-\lambda)\phi'} \sin \theta' \right\} \end{aligned}$$

$$+ \delta_{\lambda', -\lambda} f_1(p', p, \cos \theta') \frac{\lambda}{2} \sin \theta' \Big\} . \quad (19)$$

Dengan kata lain, kebergantungan  $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}})$  pada sudut azimuth  $\phi'$  dapat dipisahkan dari kebergantungannya pada variabel lain:

$$V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = e^{-i(\lambda' - \lambda)\phi'} V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') , \quad (20)$$

dengan

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda', -\lambda} \frac{\lambda}{2} f_1(p', p, \cos \theta') \sin \theta' . \end{aligned} \quad (21)$$

Dengan  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ ,  $V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$  di Eq. (21) menunjukkan relasi simetri berikut:

$$V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') = (-)^{\lambda' - \lambda} V_{-\lambda', -\lambda}(p', p, \theta') . \quad (22)$$

Jika relasi di Eq. (22) dimasukkan ke Eq. (20), diperoleh relasi simetri untuk  $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}})$  sebagai berikut:

$$V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = (-)^{\lambda' - \lambda} e^{-2i(\lambda' - \lambda)\phi'} V_{-\lambda', -\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) . \quad (23)$$

## 4 Elemen T-matrix

Sebelum ini, tanpa memperhitungkan spin telah diperoleh persamaan integral untuk elemen T-matrix sebagai berikut:

$$T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\mathbf{p}'' \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} V(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') T(\mathbf{p}'', \mathbf{p}) . \quad (24)$$

Dengan cara serupa, diperoleh persamaan integral untuk elemen T-matrix  $T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  sebagai berikut:

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p}'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} T_{\lambda''\lambda}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}) . \quad (25)$$

Sebagaimana biasa, arah momentum awal dipilih sebagai arah z,  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ , sehingga Eq. (25) menjadi:

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p}'' \frac{V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} T_{\lambda''\lambda}(\mathbf{p}'', p\hat{\mathbf{z}}) . \quad (26)$$

Sama seperti  $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ , elemen T-matrix  $T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  juga bersifat invarian rotasi. Untuk  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ , kebergantungan elemen T-matrix pada sudut azimuth  $\phi'$  muncul sebagai faktor fase  $e^{-i(\lambda' - \lambda)\phi'}$ , serupa dengan  $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}})$  di Eq. (20):

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = e^{-i(\lambda' - \lambda)\phi'} T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') . \quad (27)$$

Setelah  $T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}})$  di Eq. (27) dimasukkan ke Eq. (26), diperoleh persamaan untuk  $T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p}'' \frac{V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')} {E_p + i\epsilon - E_{p''}} e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} T_{\lambda''\lambda}(p'', p, \theta'') . \end{aligned} \quad (28)$$

Di Eq. (28) integral dengan variabel  $\phi''$  adalah:

$$\int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} . \quad (29)$$

Persamaan (16) menunjukkan bahwa kebergantungan  $V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')$  pada sudut azimuth  $\phi'$  dan  $\phi''$  dapat dinyatakan sebagai fungsi  $V_1$  dan  $V_2$  berikut:

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') &= \delta_{\lambda'\lambda''} V_1 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) \\ &+ \delta_{\lambda', -\lambda''} \lambda'' e^{2i\lambda''\phi'} V_2 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) . \end{aligned} \quad (30)$$

Dengan demikian, integrand di Eq. (29) dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi sudut-sudut azimuth  $g(\phi' - \phi'')$ , yang periodik dalam variabel  $\phi''$ , dengan periode  $2\pi$ , seperti ditunjukkan berikut ini:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi'' \left\{ \delta_{\lambda'\lambda''} V_1 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\lambda', -\lambda''} \lambda'' e^{2i\lambda''\phi'} V_2 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) \right\} e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi'' \left\{ \delta_{\lambda'\lambda''} V_1 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) e^{i(\lambda'' - \lambda)(\phi' - \phi'')} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\lambda', -\lambda''} \lambda'' V_2 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) e^{i(\lambda'' - \lambda)(\phi' - \phi'')} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi'' \left\{ \delta_{\lambda'\lambda''} V_1 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{\lambda', -\lambda''} \lambda'' V_2 \left( \cos(\phi' - \phi''), e^{-2i\lambda''(\phi' - \phi'')} \right) \} e^{i(\lambda'' - \lambda)(\phi' - \phi'')} \\
& = \int_0^{2\pi} d\phi'' g(\phi' - \phi'') .
\end{aligned} \tag{31}$$

Integral tertutup (*closed integral*) di Eq. (31), yang berarti integral di Eq. (29), tidak bergantung pada  $\phi'$ , karena integrasi dapat dimulai dari titik manapun di sepanjang sumbu  $\phi''$ :

$$\int_0^{2\pi} d\phi'' g(\phi' - \phi'') = \int_0^{2\pi} d\phi'' g(\phi'') . \tag{32}$$

Dengan demikian, dapat kita definisikan suatu fungsi  $V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'')$  sebagai berikut:

$$V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'') \equiv \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} , \tag{33}$$

sehingga persamaan integral untuk  $T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$  di Eq. (28) menjadi:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') \\
&+ 2\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dp'' \frac{p''^2}{p^2 + i\epsilon - p''^2} \\
&\times \int_{-1}^1 d \cos \theta'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, \theta'') .
\end{aligned} \tag{34}$$

Mengingat nilai-nilai  $\lambda, \lambda', \lambda'' = \pm \frac{1}{2}$ , maka untuk tiap nilai  $\lambda$  diperlukan 2 persamaan seperti Eq. (34) yang harus diselesaikan secara simultan, yaitu untuk mendapatkan  $T_{\frac{1}{2}\lambda}(p', p, \theta')$  dan  $T_{-\frac{1}{2},\lambda}(p', p, \theta')$ . Jadi, dijumpai problem menyelesaikan dua persamaan integral terkopel (coupled integral equations) untuk tiap nilai  $\lambda$ . Untuk semua nilai  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ , dengan demikian, ada 2 set 2 persamaan integral terkopel yang harus diselesaikan.

Perhatikan bahwa integral tertutup di Eq. (32) juga invarian apabila arah integrasi dibalik:

$$\int_0^{2\pi} d\phi'' g(\phi'') = \int_0^{2\pi} d\phi'' g(-\phi'') . \tag{35}$$

Berdasarkan sifat yang ditunjukkan di Eq. (35), diperoleh relasi simetri untuk  $V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'')$  sebagai berikut:

$$V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'') = \int_0^{2\pi} d\phi'' \left\{ \delta_{\lambda'\lambda''} V_1 \left( \cos \phi'', e^{-2i\lambda''\phi''} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{\lambda', -\lambda''} \lambda'' V_2 \left( \cos \phi'', e^{-2i\lambda''\phi''} \right) \} e^{i(\lambda'' - \lambda)\phi''} \\
= & \int_0^{2\pi} d\phi'' \left\{ \delta_{\lambda' \lambda''} V_1 \left( \cos \phi'', e^{2i\lambda''\phi''} \right) \right. \\
& \quad \left. + \delta_{\lambda', -\lambda''} \lambda'' V_2 \left( \cos \phi'', e^{2i\lambda''\phi''} \right) \right\} e^{-i(\lambda'' - \lambda)\phi''} \\
= & (-)^{\lambda' - \lambda''} \int_0^{2\pi} d\phi'' \left\{ \delta_{-\lambda', -\lambda''} V_1 \left( \cos \phi'', e^{2i\lambda''\phi''} \right) \right. \\
& \quad \left. + \delta_{-\lambda' \lambda''} (-\lambda'') V_2 \left( \cos \phi'', e^{2i\lambda''\phi''} \right) \right\} e^{-i(\lambda'' - \lambda)\phi''} \\
= & (-)^{\lambda' - \lambda''} V_{-\lambda', -\lambda''}^{-\lambda}(p', p'', \theta', \theta''). \tag{36}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan relasi simetri di Eq. (36) diperoleh relasi simetri untuk  $T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$ , yang serupa dengan relasi simetri untuk  $V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$  di Eq. (22):

$$T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') = (-)^{\lambda' - \lambda} T_{-\lambda', -\lambda}(p', p, \theta'). \tag{37}$$

Relasi simetri Eq. (37) membuat kita cukup menyelesaikan satu set, bukan 2 set, 2 persamaan integral terkopel di Eq. (34), yaitu untuk  $\lambda = \frac{1}{2}$ , sehingga diperoleh  $T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta')$  dan  $T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta')$ .