T-*Matrix* tanpa Spin

(Acuan, W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*, Springer-Verlag (1983), Bab 1.)

1 Formulasi hamburan bebas representasi (dalam notasi Dirac)

Formulasi yang disampaikan di sini bersifat disederhanakan, dengan demikian, sebagian detil tidak ditunjukkan.

Hamiltonian hamburan H terdiri dari suku energi kinetik (hamiltonian bebas) H_0 dan suku interaksi V:

$$H = H_0 + V \,. \tag{1}$$

Setelah sejumlah langkah, formulasi hamburan membawa ke persamaan Schrödinger untuk keadaan tunak (*stationary*):

$$H_0|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \qquad \text{dan} \qquad H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \,, \tag{2}$$

dengan E energi hamburan, $|\varphi\rangle$ keadaan bebas saat jarak antar dua partikel yang bertumbukan lebih dari jangkauan interaksi, $|\psi\rangle$ keadaan hamburan. Energi E tetap, dengan demikian, baik H_0 maupun H memberikan nilai eigen yang sama, masing-masing untuk $|\varphi\rangle$ dan $|\psi\rangle$. Nilai E dapat dihitung dari momentum relatif awal $\mathbf{p}$ yang diketahui (salah satu dari sejumlah besaran yang diatur dalam eksperimen, tentu saja dalam kerangka laboratorium), yaitu ketika kedua partikel masih saling berjauhan, sehingga belum berinteraksi, dan energi total sama dengan energi kinetik:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} = \frac{p^2}{2\mu} \,, \tag{3}$$

dengan μ massa tereduksi sistem. Untuk selanjutnya kita beri label p pada energi dan keadaan (*state*), menjadi E_p, $|\varphi_p\rangle$, $|\psi_p\rangle$.

Keadaan hamburan $|\psi_p\rangle$ dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (H_0 + V)|\psi_p\rangle &= E_p|\psi_p\rangle \\ \rightarrow (E_p - H_0)|\psi_p\rangle &= V|\psi_p\rangle \qquad (4) \\ \rightarrow (E_p - H_0)^{-1}(E_p - H_0)|\psi_p\rangle &= (E_p - H_0)^{-1}V|\psi_p\rangle \\ \rightarrow |\psi_p\rangle &= \frac{1}{E_p - H_0}V|\psi_p\rangle \,. \qquad (5) \end{aligned}$$

Solusi di Eq. (5) merupakan solusi khusus (*particular solution*) Eq. (4). Kita dapatkan solusi atau fungsi pelengkap (*complementary function*) Eq. (4) adalah $|\varphi_p\rangle$, seperti ditunjukkan sebagai

berikut:

$$H_0|\varphi_p\rangle = E_p|\varphi_p\rangle \to (E_p - H_0)|\varphi_p\rangle = 0\,. \tag{6}$$

Dengan demikian, solusi lengkap Eq. (4) adalah:

$$|\psi_p\rangle = |\varphi_p\rangle + \frac{1}{E_p - H_0}V|\psi_p\rangle = |\varphi_p\rangle + G_0(E_p)V|\psi_p\rangle\,, \tag{7}$$

dengan $G_0(E_p)$ adalah propagator bebas (*free propagator*):[1]

$$G_0(E_p) = \frac{1}{E_p - H_0}\,. \tag{8}$$

Untuk mengatasi singularitas, mengingat E termasuk dalam spektrum (sebaran nilai) H_0, maka ditambahkan nilai imajiner kecil pada E_p sebagai berikut:

$$|\psi_p\rangle^{(\pm)} = |\varphi_p\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{E_p \pm i\epsilon - H_0}V|\psi_p\rangle^{(\pm)} = |\varphi_p\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}G_0(E_p \pm i\epsilon)V|\psi_p\rangle^{(\pm)}\,. \tag{9}$$

Untuk selanjutnya, kita gunakan notasi $|\mathbf{p}\rangle$ untuk $|\varphi_p\rangle$, $|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}$ untuk $|\psi_p\rangle^{(\pm)}$, serta:

$$G_0^{(\pm)}(E_p) = \lim_{\epsilon\to 0}G_0(E_p \pm i\epsilon)\,, \tag{10}$$

sehingga Eq. (9) menjadi:[2]

$$|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} = |\mathbf{p}\rangle + G_0^{(\pm)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}\,. \tag{15}$$

[1]Dalam representasi posisi (ruang konfigurasi) G_0 menjadi fungsi Green.

[2]Dalam formulasi formal hamburan diperoleh:

$$|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} = \lim_{\epsilon\to 0}\pm i\epsilon G(E_p \pm i\epsilon)|\mathbf{p}\rangle\,, \tag{11}$$

dengan $G(E_p \pm i\epsilon)$ propagator lengkap (*full propagator*):

$$G(E_p \pm i\epsilon) = \frac{1}{E_p \pm i\epsilon - H}\,. \tag{12}$$

Propagator lengkap $G(z)$ dan propagator bebas $G_0(z)$ memenuhi relasi berikut:

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z)\,. \tag{13}$$

Jika Eq. (13) diterapkan pada Eq. (11), diperoleh Eq. (15):

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} &= \lim_{\epsilon\to 0}\pm i\epsilon G_0(E_p \pm i\epsilon)|\mathbf{p}\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}(\pm i\epsilon)G_0(E_p \pm i\epsilon)VG(E_p \pm i\epsilon)|\mathbf{p}\rangle \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\pm i\epsilon\frac{1}{E_p \pm i\epsilon - H_0}|\mathbf{p}\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}G_0(E_p \pm i\epsilon)V(\pm i\epsilon)G(E_p \pm i\epsilon)|\mathbf{p}\rangle \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\pm i\epsilon\frac{1}{E_p \pm i\epsilon - E_p}|\mathbf{p}\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}G_0(E_p \pm i\epsilon)V|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} \\
&= |\mathbf{p}\rangle + \lim_{\epsilon\to 0}G_0(E_p \pm i\epsilon)V|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} \\
&= |\mathbf{p}\rangle + G_0^{(\pm)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

Suku pertama di Eq. (15), yaitu $|\mathbf{p}\rangle$ menggambarkan keadaan awal, gelombang datang (*incoming wave*). Suku kedua dipilih yang menggambarkan keadaan terhambur, gelombang yang menjauh dari pusat hamburan (*outgoing wave*). Dengan demikian, untuk kasus hamburan solusi yang sesuai adalah:

$$|\mathbf{p}\rangle^{(+)} = |\mathbf{p}\rangle + G_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} \,. \tag{16}$$

Persamaan (16) disebut sebagai persamaan Lippmann-Schwinger.

Menurut Eq. (16), keadaan hamburan $|\mathbf{p}\rangle^{(+)}$ dapat diekspansikan menjadi:

$$|\mathbf{p}\rangle^{(+)} = |\mathbf{p}\rangle + G_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle + G_0^{(+)}(E_p)VG_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle + \dots \,. \tag{17}$$

Jika ekspansi tersebut dimasukkan ke amplitudo hamburan $A(\mathbf{p}', \mathbf{p})$, kita peroleh deret Born (lihat catatan terdahulu):

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = & -(2\pi)^2\mu\langle\mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} \\ = & -(2\pi)^2\mu\left[\langle\mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle + \langle\mathbf{p}'|VG_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle + \langle\mathbf{p}'|VG_0^{(+)}(E_p)VG_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle + \dots\right] \,. \end{aligned} \tag{18}$$

Jika operator interaksi / potensial V dikerjakan pada persamaan Lippmann-Schwinger (16), diperoleh:

$$V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} = V|\mathbf{p}\rangle + VG_0^{(+)}(E_p)V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} \,. \tag{19}$$

Apabila didefinisikan suatu operator T sebagai berikut:

$$V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} = T|\mathbf{p}\rangle \,, \tag{20}$$

maka Eq. (19) menjadi:

$$T|\mathbf{p}\rangle = V|\mathbf{p}\rangle + VG_0^{(+)}(E_p)T|\mathbf{p}\rangle \,, \tag{21}$$

sehingga diperoleh persamaan untuk operator T sebagai berikut:

$$T = V + VG_0^{(+)}(E_p)T \,. \tag{22}$$

Persamaan (22) kadang disebut sebagai persamaan Lippmann-Schwinger untuk matriks T (T-*matrix*). Persamaan (22) menjadi persamaan utama dalam perhitungan hamburan. Dengan menyelesaikan Eq. (22) kita dapat menghitung penampang lintang hamburan:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = & -(2\pi)^2\mu\langle\mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle^{(+)} = -(2\pi)^2\mu\langle\mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle = -(2\pi)^2\mu T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \\ \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = & |A(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 = (4\pi^2\mu)^2|T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Selain matriks T, dikenal juga matriks S dan matriks M, yang semuanya saling berhubungan:

$$S = 1 - 2\pi i\delta(E_{p'} - E_p)T \qquad \text{dan} \qquad M = -\mu(2\pi)^2 T\,. \tag{24}$$

Dalam ruang momentum, elemen-elemen matriks tersebut dinyatakan sebagai:

$$\langle \mathbf{p}'|S|\mathbf{p}\rangle = S(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) - 2\pi i\delta(E_{p'} - E_p)T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \tag{25}$$

$$\langle \mathbf{p}'|M|\mathbf{p}\rangle = M(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = -\mu(2\pi)^2 T(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,. \tag{26}$$

Kita lihat kembali amplitudo hamburan $A(\mathbf{p}',\mathbf{p})$. Sesuai definisi amplitudo hamburan, besar momentum akhir sama dengan besar momentum awal, $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}| = p$, dan besar momentum tersebut terhubung dengan energi proses $E_p = p^2/(2\mu)$. Dengan demikian, dikatakan bahwa amplitudo hamburan merupakan kuantitas "pada kulit energi" (*on the energy shell* atau disingkat *on-shell*). Demikian juga matriks S, yang diberikan di Eqs. (24) dan (25), fungsi delta Dirac $\delta(E_{p'} - E_p)$ pada matriks S menjamin bahwa $E_{p'} = E_p$, sehingga $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}| = p$, dan p terhubung dengan energi proses E_p. Jadi, matriks S juga kuantitas *on-shell*. Berkenaan dengan matriks T, yang memenuhi Eq. (22), momentum awal $\mathbf{p}$ pada elemen matriks $T(\mathbf{p}',\mathbf{p})$ terhubung dengan energi proses E_p, namun tidak demikian dengan momentum akhir $\mathbf{p}'$, sebagaimana lebih jelas kita lihat pada penyelesaian Eq. (22) setelah ini. Dengan demikian, matriks T disebut kuantitas "tidak pada kulit energi" (*off the energy shell* atau disingkat *off-shell*), atau kadang juga disebut kuantitas *half-shell*.[3] Matriks M, dengan demikian, juga merupakan kuantitas *off-shell*, atau dapat juga disebut *half-shell*.

2 Teknik 3 dimensi dalam ruang momentum

Di bagian ini ditunjukkan penyelesaian Eq. (22) untuk mendapatkan elemen matriks T dalam ruang momentum, yang kemudian dipakai untuk menghitung penampang lintang. Basis yang dipakai adalah $|\mathbf{p}\rangle$, yang kita sebut sebagai basis 3 dimensi (3D), karena vektor momentum $\mathbf{p}$ bersifat 3 dimensional.[4] Keadaan basis $|\mathbf{p}\rangle$ memiliki ortogonalitas dan relasi kekomplitan (*completeness relation*) sebagai berikut:

$$\langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = \delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) \qquad \text{dan} \qquad \int d\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| = \hat{1}\,. \tag{27}$$

[3]Pada hamburan lebih dari 2 partikel matriks T benar-benar sepenuhnya kuantitas *off-shell*, karena baik $\mathbf{p}$ maupun $\mathbf{p}'$ tidak terhubung dengan energi proses. Sebutan *half-shell* untuk matriks T, dengan demikian, hanya berlaku untuk hamburan 2 partikel.

[4]Sebutan 3D hanyalah sebagai nama. Apapun basis yang dipakai, proses hamburan tetaplah dihitung sebagai proses 3 dimensi.

Persamaan (22) dalam basis $|\mathbf{p}\rangle$ dikerjakan sebagai berikut:[5]

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle &= \langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle + \langle \mathbf{p}'|VG_0^{(+)}(E_p)T|\mathbf{p}\rangle \\
\rightarrow T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) &= V(\mathbf{p}',\mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}'''\, d\mathbf{p}''\, \langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}'''\rangle\langle \mathbf{p}'''|G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}''\rangle\langle \mathbf{p}''|T|\mathbf{p}\rangle \\
&= V(\mathbf{p}',\mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}'''\, d\mathbf{p}''\, V(\mathbf{p}',\mathbf{p}''')\langle \mathbf{p}'''|G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}''\rangle T(\mathbf{p}'',\mathbf{p}) \qquad (28)\\
\langle \mathbf{p}'''|G_0^{(+)}(E_p)|\mathbf{p}''\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\langle \mathbf{p}'''|\frac{1}{E_p + i\epsilon - H_0}|\mathbf{p}''\rangle \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\langle \mathbf{p}'''|\mathbf{p}''\rangle \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\delta(\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'')\frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} \qquad (29)\\
\rightarrow T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) &= V(\mathbf{p}',\mathbf{p}) + \lim_{\epsilon\to 0}\int d\mathbf{p}''\, \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} V(\mathbf{p}',\mathbf{p}'')T(\mathbf{p}'',\mathbf{p})\,. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Dipilih $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}}$, yang berarti $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$. Hamburan bersifat simetrik terhadap sumbu z, sehingga supaya mudah dipilih $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'$, dengan kata lain, hamburan terjadi pada bidang xz, sehingga sudut azimuth untuk momentum akhir $\phi' = 0$. Dengan demikian:

$$T(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = T(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = T(p', \hat{\mathbf{p}}'\cdot\hat{\mathbf{z}}, p) = T(p', \cos\theta', p)\,, \qquad (31)$$

hal yang sama berlaku untuk $V(\mathbf{p}',\mathbf{p})$ dan $T(\mathbf{p}'',\mathbf{p})$. Persamaan (30) kini menjadi:

$$\begin{aligned}
T(p',\cos\theta',p) &= V(p',\cos\theta',p) + \lim_{\epsilon\to 0}\int d\mathbf{p}''\, \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} V(\mathbf{p}',\mathbf{p}'')T(p'',\cos\theta'',p) \\
&= V(p',\cos\theta',p) + \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty dp''\, \frac{p''^2}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} \int_{-1}^{1} d\cos\theta''\, T(p'',\cos\theta'',p) \\
&\qquad \times \int_0^{2\pi} d\phi'' V(\mathbf{p}',\mathbf{p}'')\,. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Integral untuk variabel ϕ'' diperoleh sebagai berikut:[6]

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\phi'' V(\mathbf{p}',\mathbf{p}'') &= \int_0^{2\pi} d\phi'' V(p', \hat{\mathbf{p}}'\cdot\hat{\mathbf{p}}'', p'') \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi'' V(p', \cos\theta', p'', \cos\theta'', \cos(\phi' - \phi'')) \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi'' V(p', \cos\theta', p'', \cos\theta'', \cos\phi'')
\end{aligned}$$

[5]Persamaan (30) menunjukkan bahwa momentum akhir $\mathbf{p}'$ dan $\mathbf{p}''$ tidak terhubung dengan energi E_p, melainkan bebas, sehingga matriks T bukan kuantitas *on-shell*.

[6]$\hat{\mathbf{p}}'\cdot\hat{\mathbf{p}}'' = \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\phi' - \phi'') = \cos\theta'\cos\theta'' + \sqrt{1-\cos^2\theta'}\sqrt{1-\cos^2\theta''}\cos(\phi' - \phi'')$

$$= \tilde{V}(p', \cos\theta', p'', \cos\theta'') \,. \tag{33}$$

Kini, Eq. (32) menjadi persamaan integral dalam 2 variabel:

$$\begin{aligned} T(p', \cos\theta', p) = V(p', \cos\theta', p) + \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty dp'' \, \frac{p''^2}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} \\ \times \int_{-1}^{1} d\cos\theta'' \, \tilde{V}(p', \cos\theta', p'', \cos\theta'') T(p'', \cos\theta'', p) \,. \end{aligned} \tag{34}$$

Dengan menyelesaikan Eq. (34) diperoleh $T(p', \cos\theta', p)$. Kita ambil elemen matriks T dengan momentum akhir *on-shell*, $p' = p = \sqrt{2\mu E_p}$, untuk menghitung penampang lintang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= (4\pi^2\mu)^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \\ &= (4\pi^2\mu)^2 |T(p\hat{\mathbf{p}}', p\hat{\mathbf{z}})|^2 \\ &= (4\pi^2\mu)^2 |T(p, \cos\theta', p)|^2 \,. \end{aligned} \tag{35}$$